This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

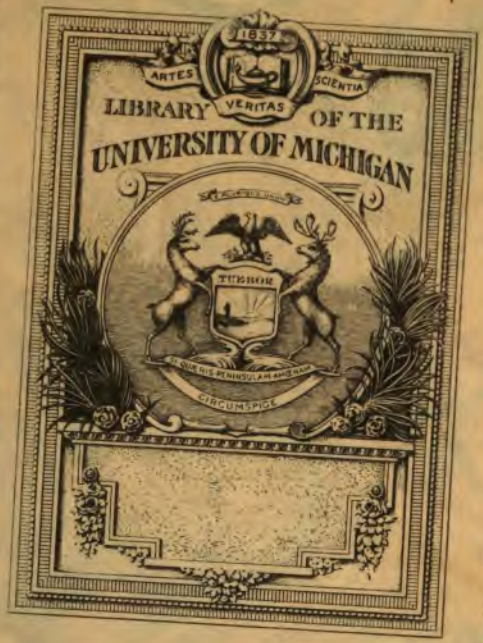
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

A 546933


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SIRCUMSPICE

QA
35
.S26

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

TOME III.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES.

PAR M. L'ABBÉ SAURI,

ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.

TOME TROISIEME.

A PARIS,

Aux Dépens de RUAULT, Libraire, rue de la Harpe, près de la rue Serpente.

MDCCLXXIV.

Avec Approbation, & Privilége du Roi.

Hist. de l'Acad. La Fille 2-1678 16217

DISCOURS

PRÉLIMINAIRE.

A PEINE les Géomètres eurent-ils commencé à comparer les figures rectilignes avec les curvilignes, qu'ils firent uſage des raiſons & des quantités dont la différence devenoit plus petite qu'aucune grandeur donnée. Les Mathématiciens qui ſuivirent, ennuyés de la longueur des démonſtrations, établirent quelques lemmes dont ils faiſoient uſage dans les recherches particulières. Tous ces lemmes ſont renfermés dans ce principe : *les quantités & les rapports des quantités qui vont en s'approchant de l'égalité, de maniere que leur différence devient plus petite qu'aucune quantité donnée, ſont, à la fin égales.* Ce principe eſt évident ; car, ſi on ſuppoſe qu'à la fin leur différence ſoit D, quantité donnée, elles ne pourroient pas approcher de l'égalité plus près que de la quantité D, ce qui eſt contre l'hypothèſe. Si peu qu'on ſoit verſé dans la lecture d'Apollonius, d'Archimède & de

Pappus, on ne ſauroit diſconvenir que les Grecs n'euſſent des méthodes pour mener les tangentes des courbes, mais elles étoient longues & laborieuſes. Quoi de plus pénible, en effet, que de démontrer qu'une ligne droite menée à un point d'une courbe, eſt tangente de cette courbe, lorſque les ordonnées voiſines, l'une de la droite, l'autre de la gauche, & terminées à cette ligne, ſont à la fois plus grandes ou à la fois plus petites que celles de la courbe? quoi de plus prolixe que de meſurer les aires curvilignes par des figures inſcrites & circonſcrites? Fermat eſt le premier, je penſe, qui, pour meſurer les lignes courbes, ait employé deux figures, dont l'une a un plus grand périmètre & l'autre un plus petit périmètre que celui de la courbe. Mais ſon invention n'eſt pas d'une grande utilité.

Cavalieri de Milan, ſuivant la route que le célèbre Galilée, dont il avoit été auditeur, avoit tracée dans ſes dialogues de la *Nouvelle Science*, fit imprimer à Boulogne en 1635 un Ouvrage conſidérable ſur la méthode des indiviſibles, dans lequel on trouve des recherches précieuſes ſur les rapports & les meſures des ſurfaces & des ſolides curvilignes. Toricelli,

Roberval, Tacquet & preſque tous les Géomètres de ce tems-là, firent uſage de cette méthode.

On ne doit pas paſſer ſous ſilence Grégoire de S. Vincent & Wallis qui, excités par les découvertes de Cavalieri, travaillerent avec ſuccès à l'avancement des Mathématiques. Mais, quoique Cavalieri & ceux qui, après lui, ont fait uſage de la méthode des indiviſibles, paroiſſent n'avoir prétendu autre choſe ſinon, qu'il y a la même proportion entre les ſolides & les ſurfaces qu'entre les ſurfaces & les lignes, bien des gens ont penſé que la méthode conſiſtoit à faire voir que les ſolides ſont compoſés de ſurfaces, les ſurfaces de lignes & les lignes de points, ce qui ſans doute ſeroit un paralogiſme des plus palpables; car les points Mathématiques n'ayant aucune longueur, les lignes aucune largeur, & les ſurfaces aucune épaiſſeur, un aſſemblage de points ne ſauroit produire une ligne, ni un aſſemblage de lignes une ſurface, ni un aſſemblage de ſurfaces un ſolide. Les anciens Mathématiciens jaloux de conſerver l'évidence géométrique dans leurs procédés n'ont jamais paſſé par ces degrés; c'eſt-à-dire, ne ſont jamais deſcendus des ſolides aux

ſurfaces, des ſurfaces aux lignes, & des lignes aux points (*).

Avant que la méthode des indiviſibles eût paru, l'illuſtre Fermat en avoit donné une pour mener les tangentes des courbes, & pour trouver les *maxima* & les *minima*. L'Ouvrage de ce Géomètre fut ſuivi de la nouvelle Méthode de Newton & de Leibnitz, je veux dire, de la Méthode des Fluxions ou des Infiniment petits. Mais je ne puis me perſuader que tous ceux qui en ont fait uſage, ou qui l'ont enrichie s'en ſoient formé la même idée. En effet, en liſant les Livres modernes qui traitent du Calcul Différentiel ou du Calcul des Infiniment petits, on a bien de la peine à s'empêcher de penſer que leurs Auteurs déſignent des quantités finies ſous le nom d'Infiniment petites, quoiqu'ils aſſûrent qu'elles ſont beaucoup plus petites que celles auxquelles ils les comparent, comme ſi par exemple, on compare une goutte d'eau avec l'Océan, ou un grain de pouſſiere avec le globe

(*) Ceux qui voudront avoir quelques notions métaphyſiques ſur la nature des lignes, peuvent conſulter la Diſſertation ſur le tems que nous avons miſe dans notre Métaphyſique.

terreſtre. C'eſt-là, ſans doute, ce qui a porté pluſieurs Savans à critiquer & à rejetter cette belle théorie. Mac-Laurin voulant ôter tout ſujet de diſpute, a entrepris de démontrer les loix du Calcul Infinitéſimal ſelon la méthode des anciens Géomètres; mais ſes démonſtrations, quoique rigoureuſes & claires, ſuppoſent beaucoup de patience dans le lecteur. Le célèbre Euler prétend que les quantités différentielles ne ſont autre choſe que de purs riens, nous ne ſaurions être de l'avis de ce grand homme, pour les raiſons que nous avons données dans notre Calcul Différentiel; nous ne pouvons non plus, adopter l'opinion du grand Newton qui regarde les différentielles ou fluxions comme des quantités évanouiſſantes; parce que l'on ne peut conſidérer une choſe dans ſon paſſage du néant à l'être, ou de l'exiſtence à la non-exiſtence: mais il nous paroît, ainſi que nous l'avons dit dans nos recherches Métaphyſiques ſur la nature du Calcul Différentiel, (recherches que nous avons inſérées dans la premiere ſection de la ſeconde partie de ce Cours), que les différentielles ſont des quantités qui ſont quelque choſe dans le calcul & qui s'évanouiſſent, à la fin du calcul. Tel

eſt, ſelon nous, l'artifice du Calcul Différentiel, qui avoit échappé à bien des gens.

A peine la nouvelle méthode fut-elle connue que les Géomètres travaillerent à la perfectionner. Les deux freres, Jacques & Jean Bernoulli l'enrichirent des plus belles découvertes. Tout le monde ſait que le Calcul Infinitéſimal a deux parties, le Calcul Différentiel & le Calcul Intégral, ou le Calcul des Fluxions & celui des Fluentes. Le premier paſſe d'une équation finie à une autre qui renferme des quantités infiniment petites ou inaſſignables: comme il étoit bien plus facile que le ſecond, on eut bientôt trouvé le moyen de différencier une quantité donnée dans tous les cas; de-là a réſulté la méthode directe des tangentes, celles des *maximis* & *minimis*, &c; mais lorſqu'on a voulu rectifier les lignes courbes, quarrer les ſurfaces, cuber les ſolides, on a eu beſoin de cette opération qu'on nomme intégration, par le moyen de laquelle on paſſe d'une équation différentielle à l'équation finie qui l'avoit produite. Mais toutes les formules différentielles n'étant pas ſuſceptibles d'une intégrale algébrique, on a eu recours aux ſéries par le moyen deſ-

quelles on trouve des intégrales exprimées par un nombre infini de termes. Brunker, Mercator & Jacques-Grégoire, avoient démontré depuis long-tems que l'aire hyperbolique peut être exprimée par une ſérie infinie. Après Newton & les autres Anglois de cette école, cette méthode eſt devenue d'un grand uſage. Leibnitz, les deux freres Bernoulli, & le grand Euler en ont trouvé pluſieurs; mais pour retirer un certain avantage des ſéries, il faut les rendre auſſi convergentes qu'il eſt poſſible.

La méthode d'intégrer les formules par les quadratures eſt bien plus élégante & plus utile; mais les Géomètres preſcrivent avec raiſon de s'abſtenir des courbes plus élevées, lorſque les plus ſimples ſuffiſent. Vers la fin du ſiècle dernier, le ſublime Newton nous a donné un Traité des Quadratures, digne de ce grand Géomètre. Cotes, Moivre & Simpſon, travaillant ſur la même matiere, ont intégré beaucoup de formules par les angles & les logarithmes. On trouve auſſi une table ſemblable & aſſez étendue dans le Traité des Fluxions & Fluentes du ſavant Muller; mais le ſtyle concis dont il eſt écrit, & les fautes d'impreſſion qui ſe ſont gliſſées

dans l'édition françoiſe, ne permettent pas d'eſpérer qu'il puiſſe être d'une grande utilité à nos jeunes Mathématiciens.

Quoique nous devions beaucoup aux recherches des Géomètres Anglois, on auroit tort de penſer que les autres nations n'ont rien fait pour perfectionner le Calcul Intégral. Quiconque aura lû l'Ouvrage de Jacques Bernoulli, les Œuvres de Jean Bernoulli ſon frere, en 4 vol. *in*-4°. ne pourra pas s'empêcher de convenir que ces deux célèbres Géomètres ont rendu les plus grands ſervices aux Mathématiques.

Le Calcul Logarithmique & Exponentiel, dont Jean Bernoulli avoit déja donné les principales règles dans les Actes de Leipſick année 1697, a ouvert un vaſte champ aux recherches des Mathématiciens, & a fourni la ſolution d'un grand nombre de problêmes très-difficiles.

Lorſqu'il eſt queſtion de l'intégration d'une formule différentielle, l'élégance paroît demander qu'on préfére la rectification à la quadrature, puiſqu'il eſt bien plus facile de meſurer l'arc d'une courbe que ſon aire. Jean Bernoulli dans les Actes de Leipſick année 1724, a traité ſavamment cette matiere. Saladini a trouvé

le moyen de ſuppléer au théorême de Bernoulli, qui ſouvent conduit à une formule imaginaire ; enfin le célèbre Euler a donné une Théorie très-ſavante ſur la même matiere : mais elle eſt ſi ſublime qu'elle demande beaucoup de travail, ſi l'on veut faire l'application des règles générales à des formules particulieres. Enfin le grand Géomètre d'Alembert qu'on peut comparer à peu de Savans, a ramené l'intégration d'un très-grand nombre de formules différentielles à la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole, ſéparément ou enſemble ; il paroît avoir épuiſé cette matiere. Les freres Bernoulli, Manfredi, le Comte Jacques Ricati, Daniel & Nicolas Bernoulli, Vincent Ricati ont beaucoup travaillé ſur l'intégration des différentielles à pluſieurs variables : mais M. d'Alembert, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, s'eſt ouvert une route nouvelle pour la ſéparation des indéterminées, Théorie ſur laquelle le Comte Ricati, Jean Bernoulli, &c. avoient déja fait beaucoup de recherches. Il prend deux équations qui contiennent trois indéterminées, & multipliant l'une des deux par un coëfficient indéterminé, il ajoute enſuite ces deux

équations, ayant ſoin de déterminer le multiplicateur, de maniere que l'intégration puiſſe avoir lieu. Cette méthode des coëfficients indéterminés dont nous avons parlé aſſez au long, peut s'appliquer à un plus grand nombre d'équations, en introduiſant pluſieurs coëfficients indéterminés. Mais malgré les travaux de tant de grands hommes, il y a encore beaucoup d'équations différentielles du premier ordre dont on ne peut ni ſéparer les indéterminées, ni trouver l'intégrale algébrique, ou exprimée par des arcs de cercle ou par des logarithmes. Il ſeroit donc ſouvent utile de conſtruire géométriquement les différentielles qui ſont dans ce cas; c'eſt ce qui m'a déterminé à parler d'une méthode de conſtruction qui me paroît facile à mettre en pratique.

Mais les difficultés ſont bien plus grandes, lorſqu'on paſſe aux différentielles du ſecond degré ou de degrés ſupérieurs. Il eſt vrai que Jean Bernoulli, Taylor, le Comte Ricati, Vincent Ricati, Lexell, Clairaut, Fontaine, les P. P. le Seur & Jacquier, le Marquis de Condorcet, la Grange, Euler, d'Alembert, &c. ont beaucoup travaillé ſur ces matieres; cependant, malgré les efforts de tant de fa-

meux Géomètres, il nous manque, & il nous manquera, ſans doute, long-tems & même toujours, une méthode générale & praticable pour intégrer les équations des degrés ſupérieurs. Meſſieurs Clairaut, Fontaine, le Marquis de Condorcet, d'Alembert & Euler ont cherché à déterminer les conditions que doit avoir une équation différentielle pour être ſuſceptible d'intégration. M. le Marquis de Condorcet a fait connoître dans quels cas une équation différentielle d'un ordre donné étoit ſuſceptible d'une, de deux, de trois, &c. intégrations.

Preſque dès l'origine du Calcul Différentiel, les Géomètres s'étoient occupé du fameux problême des trajectoires orthogonales qui coupent une famille de courbes à angles droits. Après les travaux de Jean Bernoulli & de pluſieurs autres, le fameux Euler a jugé la matiere encore digne de lui, & il nous a donné des choſes très-curieuſes ſur cette théorie. Le problême des iſoperimètres avoit auſſi occupé les deux Bernoulli, Jean & Jacques; mais, M. Euler, dans ſon excellent Ouvrage, intitulé, *Methodus inveniendi curvas maximi minimi-ve proprietate gaudentes*, a traité cette matiere avec beaucoup d'élégance & de clarté.

Cependant il paroît que le nouveau Calcul des Variations que le ſubtil M. de la Grange nous a donné dans le ſecond volume des Mémoires de Turin, & que M. Euler a traité auſſi dans le troiſieme volume de ſon Calcul Intégral, peut fournir des méthodes plus parfaites pour la ſolution de ce beau problême.

Juſqu'ici j'ai parlé des découvertes & des inventeurs, parcourons rapidement les collections, c'eſt-à-dire, les Ouvrages dans leſquels on a raſſemblé les vérités diſperſées dans les Mémoires des Académies & dans d'autres livres. Les principaux Ouvrages de ce genre, ſont l'Analyſe démontrée de Regneau, le Cours de Mathématiques de Wolff, les Inſtitutions de Marie Agneſi, l'Analyſe des Infiniment petits du Marquis de l'Hôpital connue de tout le monde; la Méthode de trouver la meſure des ſurfaces & des ſolides de M. Carré qui a paru en 1700, mais ce Livre n'eſt pas exempt d'erreur; la Méthode de Manfredi, de conſtruire les équations différentielles du premier degré année 1707. Nous devons auſſi dire quelque choſe de la *Méthode directe & inverſe des increments* du célèbre Taylor, Ouvrage dans lequel on deſireroit un ſtyle moins concis &

plus de clarté. Le Calcul intégral de Stone imprimé à Paris année 1736, dont Bernoulli a fait voir les erreurs & les bévues. La Méthode des Fluxions & des Séries infinies du Chevalier Newton, imprimée pour la premiere fois en 1736, & qui a été imprimée en François en 1740 méritent l'attention des Savants. Les Leçons de Jean Bernoulli sur le Calcul Intégral qui ont paru en 1742 dans le tome trois de ses Œuvres, le Traité des Fluxions de Mac-Laurin que ce Géomètre a composé pour répondre à un Ouvrage imprimé en Angleterre en 1734, dans lequel l'Auteur avoit entrepris de renverser la Géometrie & les nouvelles Méthodes; le Calcul Intégral de M. de Bougainville en deux vol. *in*-4°, dans lequel on trouve un grand nombre de découvertes dues à M. d'Alembert. Il seroit à souhaiter que cet Ouvrage eût été rendu plus clair par les applications à la Géométrie & par les exemples. Le second tome des Institutions Analytiques par Ricati & Saladini en 769 pages *in-fol.*, dans lequel on trouve la méthode de différencier & d'intégrer les formules à une & à plusieurs variables, la méthode d'intégrer par les séries, par la quadrature & la rectification des courbes, le calcul

logarithmique & exponentiel, l'intégration des fractions rationelles, l'intégration des formules qui renferment des ſinus ou des coſinus, la méthode directe & inverſe des tangentes, celle des *maximis* & des *minimis*, la méthode de ſéparer les indéterminées dans les équations différentielles, différentes méthodes pour intégrer les équations différentielles des ordres ſupérieurs, les méthodes pour trouver les rayons oſculateurs & les développées, la théorie des trajectoires, les méthodes pour trouver les courbes ſuſceptibles du *maximum* & du *minimum*, & pluſieurs autres choſes, dont il ſeroit trop long de faire l'énumération. Mais il ſeroit à ſouhaiter que cet Ouvrage latin dont nous avons beaucoup profité, fût écrit avec plus de méthode & de clarté. Le Calcul Intégral des PP. le Seur & Jacquier, en deux volumes *in*-4°., le premier de 548 pages, le ſecond de 591 pages, imprimé à Parme en 1768, mérite auſſi l'attention des Géomètres; on y trouve de fort belles méthodes pour intégrer les équations & les formules différentielles, à une & à pluſieurs variables, avec un traité des variations, mais les applications à la Géométrie s'y font deſirer : cependant cet

Ouvrage nous a été de la plus grande utilité & nous l'avons même copié en quelques endroits.

Il nous reſte à parler des Ouvrages du ſavant Euler dont nous avouons avec reconnoiſſance avoir beaucoup profité, quoique nous nous ſoyons quelquefois écartés de ſes idées que nous n'avons pas crû pouvoir adopter dans tous les cas. Son livre, intitulé : *Inſtitutiones calculi differentialis cùm ejus uſu in analyſi infinitorum ac doctrinâ ſerierum*, imprimé à Berlin année 1755, contient dans 880 pages *in*-4°. la méthode de différencier une quantité quelconque, la théorie des *maximis* & *minimis*, l'application du Calcul Différentiel aux ſéries & aux équations, &c. Le Calcul Intégral du même Auteur en 3 vol. *in*-4°. imprimé à Petersbourg & dont le dernier volume a paru en 1770, traite fort au long des méthodes d'intégrer les équations différentielles à une & à pluſieurs variables, & du Calcul des Variations; mais cet Ouvrage latin ne renfermant pas les applications à la Géométrie, ne peut non plus que ſon Calcul Différentiel, être utile qu'à ceux qui ſont déja initiés dans les nouvelles méthodes. A ces livres nous devons joindre les Ouvrages de Segner &

d'Hennert, quelques Mémoires de différentes Académies & les Opuſcules du grand d'Alembert. Tels ſont les principaux Géomètres dont on trouvera les méthodes dans l'Ouvrage que nous donnons aujourd'hui au public. Il y a encore quelques Livres élémentaires qui traitent du Calcul Infinitéſimal, tels que M. l'Abbé Deidier, Bezout, Simpſon dont je ne parle pas, parce qu'ils ſont aſſez connus.

Nous allons maintenant donner une idée des objets que nous avons traités, & de la méthode que nous avons ſuivie dans la ſeconde partie de ce Cours de Mathématiques. Nous l'avons diviſée en quatre ſections; la premiere contient les principes généraux du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral avec les applications de ce premier Calcul; la ſeconde renferme les applications du Calcul Intégral à la Géométrie; la troiſieme traite de l'intégration des formules & des équations différentielles, & du Calcul des Variations; la quatrieme enfin renferme l'application de l'analyſe à de beaux problêmes Phyſico-Mathématiques. Dans la premiere ſection, après avoir développé le plus clairement qu'il m'a été poſſible les principes généraux du Calcul Différentiel & du Calcul

Intégral

Intégral qui en eſt l'inverſe (*), après avoir traité des différences des ordres ſupérieurs & de leur intégration, je fais des applications aux ſous-tangentes des courbes, j'apprends à différencier & à intégrer les quantités logarithmiques & exponentielles, & celles qui renferment des ſinus, des coſinus, tangentes, cotangentes, ſécantes & coſécantes. Je paſſe enſuite aux tangentes, ſous-normales & normales, à la méthode de déterminer l'angle de la courbe avec une ligne parallèle aux abciſſes ou aux ordonnées. Je parle auſſi des aſymptotes des courbes, tant de celles dont les ordonnées ſont parallèles que de celles dont les ordonnées partent d'un point qu'on nomme foyer.

Je traite enſuite de la fraction $\frac{0}{0}$ & des tangentes qui en dépendent, de la méthode des *maximis* & des *minimis* que j'ai développée avec le plus grand ſoin, à cauſe de ſon utilité dans les Sciences Phyſico-Mathéma-

(*) C'eſt la raiſon pour laquelle j'ai d'abord mené, pour ainſi dire, ces deux calculs de front, m'écartant en cela de la méthode ordinaire. Les règles du calcul intégral étant une ſuite de celles du calcul différentiel, je penſe que les commençants auront plus de facilité à ſaiſir les règles du calcul intégral, en les leur préſentant auſſi-tôt après celles du calcul différentiel, que ſi l'on vouloit les y ramener dans la ſuite après les applications de ce dernier.

tiques ; j'en ai fait d'abord l'application à la Géométrie, faiſant remarquer en même-tems qu'il y a des occaſions dans leſquelles on peut facilement trouver le *maximum* ou le *minimum* ſans le ſecours du Calcul Différentiel, comme je l'ai fait voir en démontrant que le cercle eſt la plus grande des figures iſoperimètres. Venant enſuite aux fonctions algébriques, j'apprends à trouver les cas dans leſquels elles deviennent un *maximum* ou un *minimum*, quel que ſoit le nombre des variables ; j'ai éclairci cette théorie par pluſieurs exemples ; j'en ai même fait l'application à une fonction aſſez compliquée de trois variables, ce que je ne ſache pas avoir été fait encore Je n'ai pas oublié non plus de parler des *maximis* & des *minimis* de différentes eſpeces qu'il ne faut pas confondre les uns avec les autres, théorie dont je ne crois pas qu'on ait encore fait mention dans aucun ouvrage François. Après avoir parlé des *maximis* & des *minimis*, je viens aux rayons oſculateurs & aux developpées, ſoit que les ordonnées partent d'un point ou qu'elles ſoient parallèles : je traite enſuite la théorie des cauſtiques par refléxion & par réfraction, celle des points d'inflexion & de rebrouſſement ſoit de la premiere, ſoit

de la ſeconde eſpèce ; je démontre que dans les points ſinguliers les courbures des courbes ne ſont pas circulaires ou, ce qui revient au même, que, lorſqu'on trouve le rayon oſculateur égal à zéro ou infini, la valeur de l'abſciſſe & de l'ordonnée étant ſuppoſée finie, il n'y a aucun cercle ni infiniment grand ni infiniment petit, qui ait la même courbure que la courbe au point dont nous parlons, ce qui eſt contraire à la doctrine commune des Géomètres. Je viens enſuite aux applications du Calcul Différentiel à l'Algebre ; & je fais voir que la formule du Binome de Newton que j'avois déja donnée dans mon Algebre, en ſuppoſant que l'expoſant eſt un nombre entier ou fractionnaire poſitif ou négatif, a encore lieu lorſque cet expoſant eſt un nombre ſourd ou irrationel tel que $\sqrt{5}$, par exemple ; j'apprends à trouver les limites des équations & leurs racines approchées, quand on ne peut les avoir exactement : je fais voir que lorſque toutes les racines d'une équation ſont réelles, il y a toujours autant de racines poſitives qu'il y a de changemens de ſignes & autant de racines négatives, qu'il y a de répétitions du même ſigne d'un terme à l'autre. Je n'oublie pas de

parler des moyens de connoître ſi une équation a des racines imaginaires, & je développe une méthode par le moyen de laquelle, étant donnée une équation qui contient des racines multiples, on peut trouver d'autres équations plus ſimples dont l'une renferme celles qui ſont contenues une fois dans la propoſée, l'autre celles qui ſont contenues deux fois ſeulement, l'autre celles qui ſont contenues trois fois ſeulement, & ainſi de ſuite. Je viens enſuite aux uſages du Calcul Différentiel dans les ſéries, j'enſeigne à élever une ſérie à une puiſſance quelconque, à multiplier une ſérie par une autre, à réduire une fraction en ſérie, &c.

Comme il eſt très-important de donner aux Commençants des notions claires ſur la nature du Calcul Différentiel, je développe mes recherches métaphyſiques ſur la nature des différentielles, & je fais voir que les démonſtrations du Calcul Différentiel ſont rigoureuſes; de maniere qu'on ne néglige aucune quantité, grande ou petite : enfin je termine cette premiere ſection par le Calcul des différences finies, (qui n'eſt autre choſe qu'un Calcul Différentiel dans lequel les différentielles deviennent des grandeurs finies) dont je fais

voir l'uſage dans la doctrine des ſéries. Tel eſt le troiſieme volume de ce Cours de Mathématiques.

Dans le quatrieme, après avoir rappellé quelques principes de Calcul Intégral dont j'avois déja parlé dans la premiere ſection, j'enſeigne à quarrer les courbes, tant celles dont les ordonnées ſont paralleles que celles dont les points ſont rapportés à un foyer. La quadrature des ſpirales demande des attentions ſans leſquelles il eſt facile de ſe tromper; car ſi la ſpirale d'Archimede, par exemple, contient deux ſpires, l'intégrale qu'on trouve renferme la ſurface de la premiere ſpire, plus celle de la ſeconde, tandis qu'on ſuppoſe communément que cette intégrale ne renferme alors que la ſurface compriſe entre le foyer & la ſeconde ſpire. Après avoir traité des quadratures, je viens aux rectifications des courbes, & je donne une formule qui contient toutes les paraboles rectifiables; elle ne s'accorde pas avec celle d'un Géomètre moderne dont les Ouvrages ſont entre les mains de tout le monde, ce qui vient de ce que ce Mathématicien, en changeant le ſigne de l'expoſant de la variable ſous le ſigne radical, lui a donné hors de ce radical un expoſant qu'elle ne doit point avoir, & cette mé-

priſe l'a conduit à une formule fauſſe.

Après avoir parlé de la rectification des courbes, l'ordre demande qu'on traite de la cubature des ſolides & de leur ſurface; c'eſt ce que j'ai fait avec toute la clarté qui m'a été poſſible. Venant enſuite à la théorie du centre de gravité des ſolides, je l'ai développée avec d'autant plus de plaiſir qu'elle eſt d'un grand uſage dans la méchanique. Je n'ai pas oublié de parler de la fameuſe regle de Guldin & de ſon uſage dans le Calcul Intégral. Paſſant auſſi-tôt après à la méthode inverſe des tangentes, j'ai réſolu un grand nombre de beaux problêmes, afin d'en faire ſentir les avantages, & de mettre les Commençans en état d'en faire l'application dans les différens cas.

Dans la premiere partie de ce Cours, j'avois déja donné quelques notions ſur la théorie des courbes à double courbure; reprenant cette matiere, je fais l'application du Calcul Différentiel & Intégral à ces courbes, en ſuivant la route que le célèbre Clairaut nous a tracée dans ſes recherches ſur ces ſortes de lignes. J'enſeigne donc à trouver leurs ſous-tangentes & leurs ſous-normales, à les rectifier, &c. telle eſt la ſeconde ſection de la ſeconde

partie de ce Cours de Mathématiques.

La troiſieme ſection eſt ſi vaſte que j'ai crû devoir la diviſer en deux parties : dans la premiere je parle d'abord de la maniere d'intégrer les formules rationnelles & je fais voir par pluſieurs exemples, qu'on peut ſouvent intégrer des formules irrationnelles, en les rendant rationnelles. L'analyſe de Diophante que j'ai traitée aſſez au long dans l'Algebre, eſt très-utile dans ces ſortes de recherches.

Je parle enſuite des formules qu'on peut intégrer par les féries, par les quadratures ou les rectifications des courbes ; de la maniere de ramener les différentielles à des formules plus ſimples, & de celles qu'on integre par le cercle. Je fais voir que toutes les imaginaires ſe réduiſent à la forme $M + N\sqrt{(-1)}$ (*), je n'oublie pas de parler de l'intégration des formules logarithmiques, de celles qui renferment des ſinus &

(*) Segner a démontré depuis long-tems que toutes les imaginaires qu'on peut rencontrer dans la réſolution des équations algébriques peuvent ſe réduire à une forme ſemblable. Mais nous faiſons voir que les quantités même dont les expoſants ſont imaginaires, peuvent s'exprimer par la formule dont on vient de parler.

des cosinus, soit circulaires soit hyperboliques, des fractions rationnelles; des différentielles dont l'intégrale dépend de la rectification de l'ellypse ou de l'hyperbole, séparément ou ensemble. Je passe ensuite à l'intégration des formules différentielles de tous les ordres, lorsqu'elles ne contiennent qu'une variable, ou du moins, lorsque de deux différentielles l'une est constante, & à celles qui renferment des signes d'intégration. Venant aussi-tôt après aux différentielles à plusieurs variables, je donne différentes méthodes pour les intégrer. Je développe les méthodes de M. Newton d'intégrer par les séries, celles de M. Fontaine, & je donne les équations de condition nécessaires pour qu'une formule ou une équation différentielle soit susceptible d'une, de deux, &c. intégrations dans l'état où elle est. Après avoir parlé fort au long des meilleures méthodes d'intégrer les équations différentielles de tous les ordres, soit à une, soit à plusieurs variables, j'enseigne dans la seconde partie de la même section à ramener l'intégration des équations différentielles du premier ordre & à trois variables à celle d'une équation à deux variables; à trouver les fonctions de deux ou de plusieurs variables

par la relation des différentielles d'un ordre quelconque ; je reprends enſuite la recherche des facteurs qui peuvent rendre les équations intégrables : je donne une méthode par le moyen de laquelle on peut ſouvent trouver l'intégrale complette & finie d'une équation différentielle d'un ordre quelconque par une ſeule intégration. Je parle après cela du fameux problême des trajectoires orthogonales & des uſages du Calcul Intégral pour trouver la nature des courbes par quelque propriété donnée. Enfin je termine cette ſection par le beau calcul des variations & ſes applications à la Géométrie & à la Méchanique.

Dans la quatrieme ſection je fais voir l'uſage de l'analyſe finie, du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral, pour la ſolution des problêmes Phyſico-Mathématiques. Je les ai choiſis capables de donner aux Commençans le deſir d'approfondir la ſcience qui nous a procuré de ſi belles connoiſſances. Comme je ne donne pas ici un traité de méchanique, j'ai placé les problêmes qui regardent cette partie des Mathématiques preſque dans l'ordre qu'ils ſe ſont préſentés à mon eſprit, ayant ſuppoſé que mes lecteurs étoient au moins

inſtruits des premiers élémens de méchanique.

Il ſeroit trop long de faire le détail de tout ce que cette ſection contient, je me contenterai de parler en peu de mots de ce qui s'y trouve de plus intéreſſant. J'y traite des loix du mouvement des corps élaſtiques & non élaſtiques, déduites du fameux *principe de la moindre action*: Le même principe étant appliqué au mouvement de la lumiere fait voir que l'angle de réflexion eſt toujours égal à celui d'incidence, & que les ſinus des angles de réfraction & d'incidence ſont toujours en raiſon conſtante. Etant donné l'angle d'élévation d'un mortier avec la force de la poudre, je détermine la plus grande hauteur à laquelle une bombe puiſſe parvenir, n'ayant pas égard à la réſiſtance de l'air; j'apprends à trouver l'angle que doivent faire les portes d'une écluſe pour qu'elle réſiſte le plus qu'il eſt poſſible à l'action de l'eau; j'enſeigne à conſtruire une ancre de maniere qu'elle s'enfonce dans le fond de la mer le plus qu'il eſt poſſible. Je parle aſſez au long du centre de percuſſion & d'oſcillation, théorie ſur laquelle pluſieurs Auteurs ſe ſont trompés. Je traite auſſi du mouvement de rotation & de pro-

jection, & à cette occaſion je détermine à quelle diſtance du centre de la Terre a dû paſſer l'impulſion primitive, pour qu'il en ait réſulté le rapport du mouvement diurne & annuel qui a lieu dans la nature. Je parle du moment d'inertie, des effets de l'attraction, du tems qu'un corps ſitué à la diſtance de la Lune mettroit à tomber ſur la Terre, de la courbure des cordes, de la ligne de la plus vîte deſcente, de celle le long de laquelle un corps s'approcheroit également de l'horiſon en tems égaux, de la figure de la Terre, du mouvement des pilons dans les moulins à poudre, des effets des machines, du frottement, des corps qui ſe meuvent dans les fluides, du ſolide de la moindre réſiſtance, de l'action & du mouvement des fluides, des mouvemens qui dépendent d'une cauſe accélératrice, des cordes vibrantes, des pompes aſpirantes, & de pluſieurs autres choſes dont le détail nous meneroit trop loin. En un mot on trouvera dans cette ſection des choſes très-intéreſſantes ſur les effets des machines, ſoit accélerantes ſoit uniformes, ſur les moulins, la manœuvre des vaiſſeaux, &c. l'hydroſtatique & l'hydraulique. Ayant parcouru les recherches ſur les mo-

difications de l'atmoſphère du ſavant M. de Luc (*), j'ai crû faire plaiſir à mes Lecteurs, en développant en peu de mots la méthode de ce grand Phyſicien pour meſurer la hauteur des lieux par le baromètre. J'ai dit auſſi quelque choſe de la Muſique, & de l'Optique : enfin en faveur de ceux qui aiment la Phyſique, je me ſuis aſſez étendu ſur les forces phyſiques qui font mouvoir les corps ; j'ai développé la théorie du flux & reflux de la mer ; celle des tubes capillaires, que le célèbre M. de Lalande a traitée fort au long & d'une maniere très-ingénieuſe dans un ſavant Mémoire qui a paru en 1770. De tous les Phyſiciens attractionnaires c'eſt celui qui explique le plus clairement les effets de l'attraction dans le tube capillaire.

Mais qu'on ne s'y trompe pas ; les ſolutions des problêmes Phyſico-Mathématiques ſont ſouvent appuyées ſur des hypothèſes précaires qui n'ont pas lieu dans la nature. Celui qui voudra déterminer, par exemple, la courbe que ſuit un corps lancé en l'air, ſera obligé de ſuppoſer que la réſiſtance de ce fluide ſuit une certaine

(*) Cet excellent Ouvrage en 2 volumes *in*-4°. a été imprimé à Genève en 1772.

loi. Mais par quel moyen s'aſſurera-t-il de l'exiſtence de cette loi ? par l'expérience, direz-vous ; fort bien : mais malgré tant d'expériences, nous n'avons encore rien de certain ſur cette matiere. D'autre côté l'expérience pourra peut-être lui faire connoître cette loi dans le cas où le mobile n'aura qu'une vîteſſe médiocre ; mais ſi le fluide ne peut ſuivre le mobile & occuper auſſi-tôt l'eſpace que celui-ci abandonne, la réſiſtance ne ſera-t-elle pas différente ? ce ſont les raiſons pour leſquelles je n'ai rapporté aucune des ſolutions que différens Géomètres ont données de ce fameux problême ; car il n'y en a aucune que je vouluſſe garantir. Souvent un Auteur s'imagine avoir prouvé que la ſolution d'un problême eſt juſte parce qu'elle s'accorde avec l'expérience ; cependant il peut ſe faire que les erreurs ſe compenſent & qu'on arrive à la vérité par une méthode fauſſe.

Il y en a d'autres qui font des ſuppoſitions de calcul, en regardant, par exemple, comme nulles des quantités qui les embarraſſent. Meſſieurs Clairaut & Maier qui ſe ſont fait tous les deux un nom immortel par leurs Tables Lunaires, ont employé (ainſi que l'a très-bien remar-

qué M. Euler dans ſa nouvelle Théorie de la Lune) des équations qu'ils ont, pour ainſi dire, trouvées en devinant & déduites de l'obſervation, au lieu qu'il falloit les déduire de la théorie de la Lune. D'autres établiſſent de beaux calculs ſur des principes ſans ſolidité, ſemblables à un Architecte ridicule qui éleveroit un ſuperbe palais ſur des fondemens ſans conſiſtance. En liſant les Ouvrages des Mathématiciens modernes, on s'apperçoit qu'il y en a pluſieurs qui manquent de Phyſique, de Logique & ſurtout de Métaphyſique, & que c'eſt principalement par le défaut de cette derniere ſcience que des gens, habiles d'ailleurs, nous ont donné tant de chimeres comme des vérités démontrées. On ne peut donc trop exhorter les jeunes Géomètres, ceux du moins qui ſe propoſent de faire certains progrès, & qui veulent approfondir les Mathématiques, à s'attacher à la Logique, à la Phyſique, & ſurtout à la Métaphyſique. Mais qu'on y prenne bien garde, quand j'exhorte les jeunes gens à méditer les vérités métaphyſiques, je n'entends pas parler de ces chimeres ſublimes, de ces êtres ſans conſiſtance & ſans réalité, de ces quiddités, entités & autres

rêveries ridicules ſur leſquelles les anciens ſcholaſtiques diſputoient à perte de vue, dans un jargon abſurde & preſque inintelligible : la vraie métaphyſique recherche la nature des êtres, ſoit matériels ſoit ſpirituels, celle de l'eſpace & du tems. Notre Métaphyſique renferme deux Diſſertations, l'une ſur le tems, l'autre ſur l'eſpace, dans leſquelles on trouve des idées nouvelles ſur ces matieres ſublimes, qui ſont, ſi l'on peut parler ainſi, des matériaux dont les Géomètres font ſi ſouvent uſage dans les ſciences Phyſico-Mathématiques, mais dont ils n'ont la plupart que des notions bien ſuperficielles & ſouvent fauſſes. La vraie Métaphyſique apprend à approfondir les principes & à les réduire à leur juſte valeur. Un Géomètre Métaphyſicien ne dira pas que la ligne eſt compoſée de points, la ſurface de lignes & le ſolide de ſurfaces. Un Mathématicien qui n'aura lu que des livres de géométrie, pourra tomber dans cette erreur groſſiere, comme l'expérience l'a déja appris.

Je ſouhaiterois que les jeunes gens qui liront ce Cours de Mathématiques, euſſent déja parcouru notre Logique & notre Mé-

taphyſique (*), (je ne parle pas de la Phyſique que je me propoſe de publier bientôt), ils pourroient peut-être alors retirer plus de profit de l'étude d'un ouvrage que j'ai fait dans la vue d'être utile à mes Concitoyens. C'eſt ce noble motif qui m'a ſoutenu dans une ſi longue & ſi pénible carriere, qui m'a fait ſurmonter tant d'obſtacles, parcourir tant de livres & entreprendre de longs travaux pour mettre à la portée des génies même ordinaires tout ce que les Mathématiques ont de plus ſublime & de plus élevé.

Je ne demande pas que le Lecteur ſoit inſtruit des élémens de Géométrie & d'Arithmétique, comme doit l'être un homme qui voudroit étudier les Inſtitutions Analytiques de Ricati & de Saladini; je ne renvoye jamais aux livres des autres, comme certains Auteurs qui ſe mettent peu en peine ſi celui qui les lit, peut ou ne peut pas ſe procurer les ouvrages dans leſquels ſe trouvent les

(*) Le deſir d'apprendre & de ſe faire un nom fait quelquefois faire aux commençants des efforts d'étude nuiſibles à leur ſanté; la lecture du chapitre des maladies des Gens de Lettres qu'ils trouveront dans notre Métaphyſique, eſt très-propre à leur donner de la modération & de la prudence.

démonſtrations

démonſtrations qu'ils n'ont pas jugé à propos de rappoter (*).

La plupart des traités de Calcul Différentiel & Intégral que nous connoiſſons, ſont trop élémentaires & peu propres à faire connoître ce qu'il y a de plus difficile en cette matiere ; quelques-uns ſont profonds & renferment de fort belles découvertes en ce genre, mais leurs illuſtres Auteurs, occupés de la gloire de l'invention, ſe ſont mis peu en peine de l'avantage de ceux qui aſpirent à les comprendre. Nous avouons avec reconnoiſſance avoir profité de ce qu'ont écrit ſur cette matiere les Mathématiciens les plus fameux ; nous ne pouvons cependant pas nous diſſimuler que pluſieurs choſes nous appartiennent en propre. D'ailleurs nous nous ſommes preſque toujours écartés de la méthode de démontrer des Inventeurs, tâchant de ſuivre nos principes & d'y ramener ce qui avoit été découvert par les autres. C'eſt pour cela, comme auſſi pour éviter les altercations, que nous n'avons

(*) Mes *Inſtitutions Mathématiques* (qu'on trouve à Paris, chez *Valade*, Libraire, rue Saint-Jacques), & ma *Métaphyſique*, ſont les ſeuls Livres auxquels j'ai quelquefois renvoyé le Lecteur.

pas toujours cité les Auteurs des découvertes, qui ſont ſouvent très douteux. Nous avons cru encore devoir varier les méthodes pour plus grande facilité, parce qu'il eſt difficile d'en aſſigner une qui ſoit généralement la plus commode. Au reſte, comme nous recherchons uniquement l'utilité des Commençans, nous laiſſons à chacun la liberté de revendiquer ce qu'il croira lui appartenir ; ne diſputant pas même les choſes ſur leſquelles nous ſommes ſûrs d'avoir une propriété excluſive, & cédant à quiconque voudra tout ce qu'il jugera à propos de répéter; pourvu qu'on nous accorde la gloire d'avoir été utiles.

Un conſeil bien important que l'on peut donner à ceux qui étudient les Mathématiques, c'eſt de lire peu & de penſer beaucoup, d'eſſayer ſouvent leurs forces en cherchant eux-mêmes les démonſtrations, en tâchant de développer les choſes qu'ils ont lues, & d'en faire des applications ; c'eſt ainſi qu'on peut acquérir la facilité de découvrir & l'eſprit d'invention. Les détails dans leſquels je ſuis entré quelquefois, ſont pour ceux qui n'ont pas le tems néceſſaire pour ſuivre la méthode dont je viens de parler.

A l'égard de l'utilité des Mathémati-

ques, je ne crois pas qu'un homme un peu inſtruit & exempt de préjugés puiſſe la révoquer en doute. Mais cette étude a encore un avantage auquel on ne fait pas aſſez d'attention : les merveilles qu'on découvre en étudiant cette ſcience, captivent l'ame, l'occupent d'une maniere délicieuſe & exempte de danger ; elles élevent l'eſprit, procurent une ſatisfaction douce, qui dégoûte des paſſions groſſieres ; elles éloignent les déſirs frivoles & procurent des plaiſirs qui renaiſſent ſans ceſſe. Pythagore ne recevoit point de diſciples qui n'euſſent étudié les Mathématiques ; on liſoit ſur ſa porte : *nul ici qui ne ſoit Géomètre* ; tant il étoit perſuadé que les Mathématiques contribuent puiſſamment au développement de l'eſprit & de la raiſon ; & l'on peut dire qu'elles ſont, pour ainſi dire, le fondement de la Phyſique, dans laquelle on ne fera jamais de grands progrès ſans le ſecours de cette ſcience.

Si nous pouvons meſurer la diſtance du Soleil à la Terre, à la Lune, à Jupiter, Mars & Saturne, calculer les mouvemens des Planètes & des Comètes, & prédire les éclipſes du Soleil & de la Lune ; ſi nos Navigateurs font aujourd'hui avec tant de facilité le voyage des Indes Orientales &

Occidentales ; ſi nous pouvons nous procurer ſi facilement les productions & les richeſſes de l'Afrique, de l'Aſie & de l'Amérique : ſi nous ſavons mieux attaquer & mieux fortifier les places que les anciens ; ſi nos batailles ſont plus ſavantes, mais moins meurtrieres que celles des Romains & des Grecs ; ſi nous pouvons calculer & régler les mouvemens & les évolutions des armées avec tant de juſteſſe, c'eſt aux Mathématiques que nous devons tous ces avantages. Mais il ſeroit inutile d'entrer dans un plus grand détail, puiſque perſonne ne conteſte l'utilité de cette belle ſcience.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INFINITÉSIMAL.

JE diviſe le *calcul infinitéſimal* en trois parties, *calcul différentiel*, *calcul intégral* & *calcul des variations*. Cette ſeconde partie de nôtre Cours de Mathématiques contiendra quatre Sections. Dans la premiere, je parlerai du calcul différentiel; dans la ſeconde & la troiſiéme, du calcul intégral & de celui des variations; dans la quatriéme enfin, je ferai l'application du calcul différentiel & du calcul intégral aux ſciences Phyſico-Mathématiques.

SECTION PREMIERE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

1 SI on conçoit qu'une quantité x augmente ou diminue d'une quantité infiniment petite dx, de ſorte qu'elle devienne $x \pm dx$, la quantité dx s'appelle la *différentielle* de x; dx ne marque pas ici le produit de la quantité d par la quantité x, mais ſeulement la différentielle de x. Les quantités conſtantes ou qui ne varient point, ſont ordinairement déſignées par les premieres lettres de l'alphabeth a, b, c, &c. Les variables par les dernieres x, y, z. Puiſque les quantités conſtantes n'ont point de différentielles, leur différentielle eſt $= 0$.

J'entends par *calcul différentiel*, la maniere de trouver les différentielles des quantités variables & les rapports de ces différentielles. Pour avoir la différentielle de x, on écrira dx, ſi x va en croiſſant, ou $-dx$, ſi x diminue. Lorſque les Géomètres ne donnent pas le ſigne — à la différentielle, ils ſuppoſent que la variable va en augmentant, à moins qu'elle ne ſoit négative; car, par exemple, la différentielle de $-x$ eſt $= -dx$. En effet, puiſque x varie d'une quantité infiniment petite dx, x devient $x+dx$, & $-x$ devient $-x-dx$. Si de cette derniere quantité on retranche $-x$, l'on a $-x-dx+x=-dx$.

La différentielle de $a+x+y$ eſt $= dx+dy$; car la différentielle de a eſt $= 0$; la différentielle de ax eſt $a\,dx$. En effet, puiſque x devient $x+dx$, ax deviendra $ax+a\,dx$. De cette quantité ôtant la quantité donnée ax, l'on aura $ax+a\,dx-$

$ax = a\,dx$, différence ou différentielle cherchée. *Donc pour trouver la différentielle d'un produit, dont un des facteurs eſt conſtant & l'autre variable, on multipliera le facteur conſtant par la différentielle du facteur variable.*

La différentielle du produit xy eſt $= y\,dx + x\,dy$. En effet, lorſque x devient $x + dx$, y devient $y + dy$ & xy devient $(x + dx) \times (y + dy) = xy + y\,dx + x\,dy + dx\,dy$; d'où retranchant la quantité donnée xy, il reſte $y\,dx + x\,dy + dx\,dy$. Or $dx\,dy$ produit d'un infiniment petit dx, par un autre infiniment petit dy, eſt un infiniment petit du ſecond ordre qui diſparoît (voyez ce que nous avons dit ſur l'infini dans la premiere partie) devant les infiniment petits $y\,dx$, $x\,dy$ du premier ordre. Donc la différentielle cherchée eſt $= y\,dx + x\,dy$; on trouveroit de même que la différentielle de $xy \pm a$ eſt $= y\,dx + x\,dy$, parce que la différentielle de a eſt $= 0$. *Donc la différentielle du produit de deux variables, eſt égale à la ſomme du produit de chacune des variables par la différentielle de l'autre variable.*

La différentielle du produit $x\,z\,u$ de trois variables, eſt $= z\,u\,dx + x\,u\,dz + x\,z\,du$; car, en ſuppoſant $z\,u = y$, nous aurions (ſelon ce que nous venons de dire) la différentielle de $z\,u = u\,dz + z\,du = dy$ & parce que $z\,u = y$, l'on a $x\,z\,u = xy$. Or, la différentielle de xy eſt $= y\,dx + x\,dy$. Donc, en ſubſtituant la valeur de y & de dy, l'on a la différentielle de $x\,z\,u$ ou de $xy = z\,u\,dx + x\,u\,dz + x\,z\,du$. *Et en général on trouvera la différentielle du produit de pluſieurs variables, en prenant la ſomme des produits*

de la différentielle de chaque variable, par les autres variables.

COROLLAIRE. Donc la différentielle de $xyzu$ est $= xyz\,du + yzu\,dx + xzu\,dy + xyu\,dz$.

2. En général, pour avoir la différentielle d'une quantité quelconque p, on ſubſtituera à la place des variables x, y, &c. qui compoſent cette quantité, les quantités $x + dx$, $y + dy$, &c. & l'on aura une autre quantité que nous appellerons P; on ôtera p de P pour avoir $P - p$; on effacera dans cette derniere quantité tous les termes qui s'évanouiſſent, par rapport aux autres termes; le reſte ſera la différentielle cherchée dp délivrée de ſes termes inutiles.

Si $p = xy$, en ſubſtituant $x + dx$ au lieu de x, $y + dy$ au lieu de y, l'on aura $P = xy + y\,dx + x\,dy + dx\,dy$; & $P - p$ ſera $xy + y\,dx + x\,dy + dx\,dy - xy = y\,dx + x\,dy$, en effaçant les termes qui ſe détruiſent, & négligeant l'infiniment petit du ſecond ordre $dx\,dy$; mais ſi y diminuoit tandis que x eſt ſuppoſé augmenter, la différentielle de y ſeroit négative & égale à $-dy$. Dans ce cas, on auroit $P - p = y\,dx - x\,dy$.

3. J'entends par *calcul intégral* l'art de trouver l'expreſſion à laquelle appartient une différentielle propoſée. Cette expreſſion s'appelle *l'intégrale* de cette différentielle. Ainſi la différentielle $y\,dx + x\,dy$ a pour l'intégrale xy, ou $xy \pm a$; car en différenciant, ſoit xy, ſoit $xy \pm a$, l'on a également $y\,dx + x\,dy$. On peut voir par là qu'on doit ajouter une conſtante (que nous déſignerons ſouvent dans la ſuite par C) à une

intégrale quelconque. Nous dirons auſſi dans la ſuite de cet Ouvrage comment on peut déterminer cette conſtante. Au reſte, cette conſtante eſt ſouvent 0; nous ne l'ajouterons cependant pas toujours pour abréger.

Il eſt aiſé de voir que le calcul intégral eſt l'inverſe du calcul différentiel; ainſi il faut faire beaucoup d'attention aux procédés de celui-ci, pour pouvoir réuſſir dans le premier.

4. La différentielle de x^m ſe trouvera (2), en ſubſtituant $x + dx$ à la place de x, pour avoir $(x+dx)^m = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}dx + \frac{m(m-1)}{1.2} \times x^{m-2}dx^2$ &c. (par le binome de Newton, voyez la premiere Partie) $= x^m + mx^{m-1}dx$, en négligeant les termes ſuivans, qui étant multipliés par des infiniment petits dx^2, dx^3, &c. des ordres ſupérieurs, diſparoiſſent devant le ſecond terme. Donc en retranchant la quantité donnée x^m, l'on a $mx^{m-1}dx$ pour la différentielle cherchée.

COROLLAIRE I. *Donc la différentielle d'une puiſſance x^m ſe trouve en multipliant par l'expoſant de la puiſſance, & par la différentielle de la quantité variable & diminuant cet expoſant d'une unité.*

Donc la différentielle de $\overline{a+y}^m$ ou de $(a+y)^m$ ſera $= m(a+y)^{m-1}dy$. Car ſoit $a+y = x$, on aura $dy = dx$, $(a+y)^m = x^m$, $d(a+y)^m$ (*) $= d(x^m) = mx^{m-1}dx = m(a+y)^{m-1}dy$, en ſubſtituant les valeurs de dx, & de x.

(*) L'expreſſion $d.(a+y)^m$ ou $d(a+y)^m$ indique la différentielle de $(a+y)^m$.

COROLLAIRE II. Donc l'intégrale de $mx^{m-1}dx$ ſera $\frac{mx^{m-1+1}dx}{(m-1+1)dx} = \frac{mx^m dx}{m dx} = x^m$.

DONC REGLE GÉNÉRALE : l'intégrale d'une différentielle monome, qui ne contient qu'une variable, ſe trouve, en augmentant d'une unité l'expoſant de la puiſſance, diviſant par cet expoſant ainſi augmenté & par la différentielle de la variable.

Une quantité affectée d'un radical ou d'un ſigne ſera dite être ſous le ſigne; ainſi dans $a\sqrt{x} = ax^{\frac{1}{2}}$, la qantité x eſt ſous le ſigne $\sqrt{}$ ou $\frac{1}{2}$, mais la quantité a eſt hors du ſigne.

L'intégrale de la différentielle $y^m dy$ ſera $\frac{y^{m+1}}{m+1}$. En effet, en différenciant cette quantité, on aura la différentielle propoſée. L'intégrale de $(a+y)^m dy$ ſera $\frac{(a+y)^{m+1}}{m+1}$. En effet, ſuppoſons $a+y=x$, on aura $(a+y)^m = x^m$, $dy = dx$ & $(a+y)^m dy = x^m dx$, dont l'intégrale eſt $= \frac{x^{m+1}}{m+1}$ (par la régle générale) $= \frac{(a+y)^{m+1}}{m+1}$. L'intégrale de $(a+by)^m dy$ eſt $\frac{(a+by)^{m+1}}{b(m+1)}$. Car ſoit $a+by = x$, on aura $b dy = dx$, $\frac{dx}{b} = dy$ & en ſubſtituant, il vient $(a+by)^m dy = x^m \frac{dx}{b} = \frac{1}{b}x^m dx$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{b} \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} =$

$\frac{1}{b} \cdot \frac{(a+by)^{m+1}}{m+1}$; l'intégrale de $(a+\frac{1}{f}y)^m dy$ ſera (en ſuppoſant $\frac{1}{f} = b$) $= \frac{1.(a+by)^{m+1}}{b(m+1)}$ $= \frac{f(a+\frac{1}{f}y)^{m+1}}{m+1}$; car $\frac{1}{f} = b$ & $\frac{1}{b} = \frac{f}{1} = f$.

Pour avoir la différentielle de $\sqrt{(a+y)}$, on ſuppoſera $\sqrt{(a+y)} = (a+y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$, en faiſant $a+y = x$, & l'on aura la différentielle de $x^{\frac{1}{2}} = m\,x^m\,dx$ (en faiſant $m = \frac{1}{2}$) $= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dy}{2\sqrt{a+y}}$

REMARQUE. Nous déſignerons l'intégrale par la lettre S ; de ſorte que $Sx^{\frac{1}{2}}\,dx$ déſignera l'intégrale de $x^{\frac{1}{2}}\,dx$ (*). Or, en ſuppoſant $\frac{1}{2} = m$, l'on a $Sx^{\frac{1}{2}}\,dx = Sx^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

En général $Sx^m dx$ eſt $= \frac{x^{m+1}}{m+1}$, excepté le cas où $m = -1$; mais nous parlerons de ce cas dans la ſuite.

COROLLAIRE. Il ſuit de ce que nous venons de

(*) On peut concevoir l'intégrale d'une différentielle, comme la ſomme des élémens infiniment petits d'où réſulte l'intégrale.

dire que l'on peut toujours trouver l'intégrale d'une quantité monome ou binome, dont la quantité, hors du ſigne, eſt la différentielle de la quantité ſous le ſigne, cette différentielle étant ſuppoſée multipliée ou diviſée par une conſtante, excepté le cas où l'on auroit un expoſant $= -1$.

5. Nous avons dit ci-deſſus que la différentielle de ax étoit adx. Donc S adx eſt $= ax$. Nous avons vu auſſi (1) que $d(xy)$ eſt $= y\,dx + x\,dy$ (A); que $d(xzu) = zu\,dx + xu\,dz + xz\,du$ (B). Donc pour avoir l'intégrale des différentielles A & B qui contiennent pluſieurs variables, on ſubſtituera les variables au lieu de leurs différentielles, & chaque terme ſera la différentielle cherchée. *Donc ſi une quantité* (M) $b\,y\,dx + b\,x\,dy + a\,dz +$ &c. *a une intégrale* $= P$, *on peut la trouver* 1°. *en intégrant le premier terme, comme ſi y étoit conſtant,* 2°. *en intégrant le ſecond terme comme ſi x étoit conſtant, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier terme, & en comparant entr'elles toutes les intégrales; car ſi elles ſont les mêmes, l'intégrale du premier terme ſera l'intégrale cherchée. Si elles ſont différentes, on ajoutera à ce qu'elles ont de commun tous les termes qui font leur différence & l'on aura l'intégrale P.* Suppoſant que la différentielle M n'a que trois termes, l'intégrale du premier terme, auſſi bien que celle du ſecond, ſera bxy, mais celle du troiſiéme eſt az; l'ajoutant à bxy, j'aurai l'intégrale P cherchée $= bxy + az$. En effet, en différenciant cette quantité, l'on aura la différentielle M.

6. Pour avoir la différentielle d'une fraction $\frac{x}{y}$, je fais $\frac{x}{y} = z$: donc $d(\frac{x}{y}) = dz$. Or,

l'équation $\frac{x}{y} = z$, donne $x = yz$, $dx = y\,dz + z\,dy$, $dx - z\,dy = y\,dz$, $\frac{dx - z\,dy}{y} = dz$, $\frac{y\,dx}{y^2} - \frac{x\,dy}{yy} = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy} = dz$, en substituant la valeur de z. *Ainsi la différentielle d'une fraction quelconque, est égale au produit de la différentielle du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur, le tout divisé par le quarré du dénominateur.* Donc S. $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ est $= \frac{x}{y}$; la différentielle de $\frac{a}{x}$ est $= -\frac{a\,dx}{xx}$, parce que $da = 0$. Donc S. $-\frac{a\,dx}{x^2} = \frac{a}{x}$.

REMARQUE. Lorsqu'une différentielle $b\,dx$ se trouve multipliée par une constante, on peut intégrer comme si la constante n'y étoit pas; mais on doit multiplier ensuite l'intégrale par la constante. Ainsi, en intégrant dx, j'ai x, & multipliant par b, il vient bx; de sorte que S. $b\,dx$ est $= b.\mathrm{S}\,dx = bx$.

Lorsqu'on pourra ramener une différentielle à la forme $x^m dx$, comme cela se peut, par exemple, dans la quantité $b\,dy\sqrt{(a+y)} = dy \times b(a+y)^{\frac{1}{2}} = dx \times bx^m$, en supposant $a + y = x$, & par conséquent $dy = dx$ & $m = \frac{1}{2}$, on intégrera facilement, puisque S. $x^m dx$ est $= \frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{(a+y)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}(a+y)^{\frac{3}{2}}$. Et

en multipliant cette derniere quantité par b, on aura $\frac{2}{3} b (a+y)^{\frac{3}{2}}$, intégrale cherchée.

Lorſque la ſubſtitution ne pourra pas réuſſir, & que la différentielle ne ſera pas contenue ſous quelqu'une des formules ci-deſſus, on pourra intégrer par les ſeries. Soit par exemple, la quantité $dy \sqrt{(a+y^2)}$, cette quantité ne pouvant ſe rapporter à aucune des formules ci-deſſus, je réduis $\sqrt{(a+y^2)} = (a+y^2)^{\frac{1}{2}}$ en une ſerie par le binome de Newton, ce qui peut ſe faire facilement, en ſubſtituant y^2 à la place de b & $\frac{1}{2}$ à la place de m dans la formule $\overline{a+b}^m = a^m \left(a + \frac{m}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{2} \times \frac{b^2}{a^2} + \text{&c.}\right) = a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{a} - \frac{1}{8}\frac{y^4}{a^2} \text{ &c.}\right)$ Multipliant tous les termes par dy, on trouve (en négligeant le multiplicateur $a^{\frac{1}{2}}$) $dy + \frac{1.y^2 dy}{2a} - \frac{1.y^4 dy}{8a^2}$ &c. prenant l'intégrale de chaque terme & multipliant la ſomme par $a^{\frac{1}{2}}$, il vient $a^{\frac{1}{2}} \left(y + \frac{1}{6a} yyy - \frac{1}{40a^2} y^5 \text{ &c.}\right)$ Cette ſerie ſera d'autant plus convergente, que y ſera plus petit par rapport à a.

Des différences des ordres ſupérieurs & de leur intégration.

7. dx étant la différence ou la différentielle de x, ſon quarré ſera déſigné par dx^2, ſon cube par dx^3, &c. Mais rien n'empêche de concevoir la différentielle de la quantité dx: elle ſera déſignée par ddx, ou par d^2x; c'eſt la ſeconde différence de x. La troiſiéme différence de x, ou la différentielle de ddx, s'exprime ainſi $dddx$, ou d^3x; & en général la différentielle de l'ordre m de la quantité x, s'exprime par d^mx. Quoique dx^2 & ddx ſoient deux infiniment petits du ſecond ordre, néanmoins ces quantités peuvent avoir entr'elles tels rapports que l'on voudra (voyez ce qu'on a dit ſur l'infini dans la premiere Partie de cet Ouvrage); ainſi il ne faut pas les confondre l'un avec l'autre. La premiere différentielle de x^m eſt (4) $m.\ x^{m-1}\,dx$. Pour avoir la ſeconde différentielle, on conſidérera d'abord un des facteurs variables x^{m-1}, par exemple, comme variable, & le facteur dx comme conſtant; l'on traitera enſuite dx comme variable & x^{m-1} comme conſtant. Ainſi l'on aura $m\,(m-1)\times x^{m-2}\,dx^2+mx^{m-1}\,ddx$ (B). Si on ſuppoſe dx conſtant, ce qu'on eſt bien le maître de faire, on aura $ddx=0$; & la ſeconde différentielle de x^m ſera $m\,(m-1)\,x^{m-2}\times dx^2$, & l'on aura S. $m\,(m-1)\,x^{m-2}\,dx^2=mx^{m-1}\,dx$. La troiſiéme différence de x^m ſe trouvera en traitant ſucceſſivement dans la quantité B chaque facteur variable comme variable & les autres comme conſtans; ce qui donnera $m.\,(m-1)\times$

$(m-2)x^{m-3} \times dx^3 + m(m-1)x^{m-2} \times 2dx\,d^2x + m(m-1)x^{m-2}\,dd\,x\,dx + mx^{m-1}d^3x$ (la différentielle de dx^2 est $= 2\,dx\,dd\,x$, par la même raiſon que celle de x^2 eſt $2\,x\,dx$, que celle de y^2 eſt $2\,y\,dy$, dont l'intégrale eſt la quantité B. Si dans la derniere différentielle on ſuppoſe $dd\,dx = 0$, c'eſt-à-dire ſi l'on ſuppoſe la différence du ſecond ordre conſtante, on effacera le terme qui eſt multiplié par d^3x, le reſte ſera la différentielle troiſiéme de x^m, en en ſuppoſant $dd\,x$ conſtant. Il n'eſt pas difficile de voir comment il faudroit s'y prendre pour avoir la différentielle du quatriéme, cinquiéme, &c. ordre de la quantité x^m.

La différentielle du premier ordre de la quantité xy, étant (1) $x\,dy + y\,dx$; la ſeconde différentielle ſera $dx\,dy + x\,dd\,y + dy\,dx + y\,dd\,x = 2\,dx\,dy + x\,dd\,y + y\,dd\,x = 2\,dx\,dy + x\,dd\,y$, en ſuppoſant dx conſtant.

En conſidérant dans celle-ci ſucceſſivement dy, x, $dd\,y$ comme variables, on aura la troiſiéme différence de xy dans la ſuppoſition de dx conſtant. Il eſt évident que S. $(2\,dx\,dy + x\,dd\,y) = x\,dy + y\,dx$, & que S. $(x\,dy + y\,dx) = xy$. Il eſt aiſé de voir maintenant comment on peut avoir la différentielle ſeconde d'une quantité quelconque. Il n'y a qu'à conſidérer ſucceſſivement dans la différentielle premiere de cette quantité chaque facteur variable comme variable & les autres comme conſtans; & faiſant la même choſe pour la différence ſeconde, on aura la troiſiéme & ainſi de ſuite, en ſe ſouvenant d'égaler à 0 les différentielles des quantités qu'on a conſidérées comme conſtantes. Quant à

l'intégration de ces ſortes de quantités, on en parlera plus au long dans la ſuite de cet Ouvrage. Tels ſont les principes les plus généraux du calcul différentiel & du calcul intégral. Faiſons quelques applications.

8. PROBLÊME. *Trouver la ſous-tangente d'une courbe algébrique, dont les ordonnées ſont parallèles.* Soit la courbe A m (fig. 1.) dont on demande la tangente au point m. Ayant mené l'ordonnée P m (y), ſon infiniment proche pn & la ligne mR = Pp, parallèlement à l'axe AL, on aura AP = x, Pp = mR = dx, nR (ou la différence de l'ordonnée $p\ n$ à l'ordonnée P m) = dy. la portion $m\ n$ de la tangente étant infiniment petite, peut être regardée comme ſe confondant avec la partie correſpondante de la courbe à laquelle elle eſt cenſée égale. Cela poſé, les triangles ſemblables $m\ n$R, mTP donnent nR. mR :: mP : PT, ou $dy : dx :: y :$ PT = $\frac{y\,dx}{dy}$ (B), expreſſion générale des ſous-tangentes. Si dans cette formule on ſubſtitue la valeur de dx priſe de l'équation de la courbe, cette valeur contenant dy, il en réſultera une expreſſion de PT délivrée de différences.

9. Soit ſuppoſée la courbe Am une parabole ordinaire dont l'équation ſoit $y^2 = ax$, a étant le paramêtre; en différenciant, on a $2y\,dy$, $= a\,dx$, $dx = \frac{2y\,dy}{a}$. Subſtituant cette valeur de dx, dans la formule B, il vient $\frac{2y^2\,dy}{a\,dy}$ $= \frac{2y^2}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x$, à cauſe de $y^2 = ax$,

c'eſt-à-dire, que la ſous-tangente de la parabole eſt double l'abſciſſe; ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit dans les Sections coniques.

10. Si la courbe eſt une parabole d'un genre quelconque, dont l'équation ſoit $a^m x^n = y^{m+n}$ (Sections coniques 92); en différenciant, l'on a $n a^m x^{n-1} dx = (m+n) y^{m+n-1} dy$, $dx = \frac{(m+n) y^{m+n-1} dy}{n a^m x^{n-1}}$. Subſtituant cette valeur dans la formule B, on trouve $\frac{y dx}{dy} = \frac{m+n}{n} \times \frac{y^{m+n}}{a^m x^{n-1}} = \frac{(m+n)}{n} \cdot \frac{a^m x^n}{a^m x^{n-1}}$ (en mettant la valeur de y^{m+n}) $= \left(\frac{m+n}{n}\right) x$. Si $m=2$ & $n=1$, l'on a $PT = 3x$. Si $m=3$ & $n=2$, l'on a $PT = \frac{5x}{2}$.

L'équation $a^m x^n = y^{m+n}$ devient $a^m x^{-n} = y^{m-n}$, en ſuppoſant n négatif; & dans ce cas, on a $a^m = y^{m-n} x^n$ (voyez la note du n°. 95 des Sections coniques) équation aux hyperboles de tous les genres par rapport aux aſymptotes, & la ſous-tangente PT (figure 2) devient $\frac{m-n}{-n} = \frac{M}{-n}$, en ſuppoſant $m-n = M$. Si $M=1$ & $n=1$, comme dans l'hyperbole du premier genre, on aura $PT = -x$, c'eſt-à-dire, que la ſous-tangente ſera égale à l'abſciſſe; mais à cauſe du ſigne —, il faut prendre la ſous-tangente du côté oppoſé à l'origine des abſciſſes. Si $M=7$ & $n=2$, l'on aura PT

$= \frac{-7x}{2}$. Si M $= 20$ & $n = 4$, l'on aura PT $= -5x$. En général, la ſous-tangente, dans les hyperboles, eſt toujours égale à l'abſciſſe multipliée par le quotient de l'expoſant de l'ordonnée, diviſé par celui de l'abſciſſe, en prenant l'expoſant de l'abſciſſe avec le ſigne —.

Dans les ellipſes de tous les genres, l'on a $\frac{a}{p} y^{m+n} = x^n \times (a-x)^m$. Différenciant & multipliant par p, il vient $(m+n)\, a y^{m+n-1}\, dy = npx^{n-1} \times (a-x)^m dx - mpx^n \times (a-x)^{m-1} dx$, $dx = \frac{(m+n)\, a y^{m+n-1} dy}{npx^{n-1} \times (a-x)^m - mpx^n \times (a-x)^{m-1}}$.

Subſtituant cette valeur de dx, l'on a $\frac{y\, dx}{dy} = \frac{(m+n)\, a y^{m+n}}{npx^{n-1}(a-x)^m - mpx^n(a^n-x)^{m-1}}$. Subſtituant la valeur de y^{m+n}, & diviſant enſuite le numérateur & le dénominateur par $px^{n-1} \times (a-x)^{m-1}$, l'on a (en ſuppoſant que la figure 3 puiſſe repréſenter ces ſortes de courbes) PT $= \frac{(m+n)(ax-x^2)}{na-nx-mx}$. Comme la quantité p ne ſe trouve pas dans l'expreſſion de la ſous-tangente, il eſt évident que cette ligne doit être la même, quelle que ſoit cette quantité. Donc toutes les courbes qui ont des équations qui ne different que par différentes valeurs de la grandeur p, ont des ſous-tangentes égales correſpondantes à des abſciſſes égales.

On trouveroit la même expreſſion pour les cer-

cles de tous les genres, dont l'équation eſt la même que celle des ellipſes, en ſuppoſant $a = p$ (*). Si $m = 1$ & $n = 2$, PT ſera $= \frac{3ax - 3x^2}{2a - 3x}$; d'où l'on tire $2A\,a - 3AP : 3x :: a - x : PT$. Si $m = n = 1$, comme dans l'ellipſe & le cercle ordinaire, l'on aura $PT = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x} = \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$, & les tangentes mT, nT correſpondantes à la même abſciſſe AP, rencontreront l'axe au même point T (fig. 4).

Dans les hyperboles de tous les genres, l'on a $\frac{a}{p}y^{m+n} = x^n \times (a + x)^m$, cette équation ne différant de celle des ellipſes que parce que dans le facteur $a + x$, x a le ſigne $+$ au lieu du ſigne $-$, la ſous-tangente ſera $= \frac{(m+n).(ax+xx)}{na+nx+mx}$. Si la courbe A$m$ (fig 1) eſt ſuppoſée une hyperbole ordinaire, dans laquelle $m = n = 1$, PT ſera $= \frac{2ax+2xx}{a+2x} = \frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x}$; d'où l'on tire $\frac{1}{2}a + x : x :: a + x : PT$. Prenant donc une quatriéme proportionnelle aux lignes $\frac{1}{2}a + x$, x, $a + x$, l'on aura la ſous-tangente PT.

(*) Pour les cercles, ellipſes & hyperboles de tous les genres, voyez les Sections coniques, n. 91, 93 & 94.

11. Pour les paraboloïdes, dont l'équation (voyez les Sections coniques 96) eſt $a^{m-1}y = x^m + bx^{m-1} + acx^{m-2} + \ldots + a^{m-2}gx + a^{m-1}k$, ou $y = x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + k$, en faiſant $a = 1$, l'on a $dy = mx^{m-1}dx + b(m-1)x^{m-2}dx + c(m-2)x^{m-3}dx \ldots + g\,dx$, dx

$$= \frac{dy}{mx^{m-1} + b(m-1)x^{m-2} + c(m-2)x^{m-3} \ldots + g}$$

$$\& \frac{y\,dx}{dy} = \frac{y}{mx^{m-1} + b(m-1)x^{m-2} \ldots + g}$$

12. Dans la ciſſoïde (fig. 5), l'on a (courb. alg. 71) $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$, en ſuppoſant le diamètre du cercle générateur $= 2a$; donc $y^2 \times (2a-x) = x^3$, $2y\,dy \times (2a-x) - y^2\,dx = 3x^2\,dx$, $2y\,dy \times (2a-x) = 3x^2\,dx + dx \times y^2 = dx \times 3x^2 + dx \times \frac{x^3}{2a-x}$ (en ſubſtituant la valeur de y^2) $= dx.\left(\frac{3xx[2a-x]+xxx}{2a-x}\right)$, $dx = \frac{2y\,dy \times [2a-x] \times [2a-x]}{6ax^2 - 2x^3}$, $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{2y^2 \times [2a-x]^2}{6ax^2 - 2x^3} = \frac{2x^3}{2a-x} \times \frac{[2a-x]^2}{6axx - 2x^3} = \frac{4ax - 2x^2}{6a - 2x}$ $= \frac{[2a-x]x}{3a-x}$; d'où l'on tire $3a-x : 2a-x :: x : TP$.

13. PROBLÈME. *Trouver la ſous-tangente dans la cycloïde* (*fig.* 6). Ayant tiré les ordonnées infiniment proches MP, *mp*, menez la tangente PT au point P du cercle générateur & la tangente MT au point correſpondant M de la cycloïde. Les arcs infiniment petits, P*p*, M*m* pouvant être conſidérés comme des portions infiniment petites des tangentes PT, *m*T, ſi l'on

tire la ligne M*s* parallèle à la tangente PT, les triangles ſemblables M*s m*, TMP donneront *ms*: M*s*:: MP: PT. Or, à cauſe des parallèles P*p* & M*s*, MP & *ms*, l'on a, en faiſant l'arc BP = *x* & PM = *y*, l'on a, dis-je, *ms* = *dy*, P*p* = *dx* = M*s*; donc *dy*: *dx*:: *y*: $PT = \frac{y\,dx}{dy} = y$; puiſque *dy* = *dx* (*), à cauſe de *y* = *x* (voyez les Courbes tranſcendantes, n°. 10).

COROLLAIRE I. Donc prenant ſur la tangente du cercle générateur la partie PT égale à l'ordonnnée *y*, l'on aura la ſous-tangente de la cycloïde.

COROLLAIRE II. Puiſque *y* = PT, le triangle MPT eſt iſocelle, les angles en T & M, égaux entr'eux, & l'angle extérieur T P *b* égal aux deux intérieurs oppoſés M & T, ſera double de l'angle M; mais l'angle T P *b* a pour meſure la moitié de l'arc P B *b*; l'angle TPB a pour meſure la moitié de l'arc PB; donc ce dernier angle eſt la moitié de l'angle TP*b*; donc il eſt égal à l'angle PMT & les lignes BP, TM ſont parallèles, à cauſe des angles correſpondans égaux, c'eſt-à-dire, que la tangente de la cycloïde eſt parallèle à la corde correſpondante du cercle générateur.

14. Dans les cycloïdes allongées ou raccourcies, l'on a $y = \frac{Dx}{C}$. (Courbes tranſcendantes,

(*) On peut regarder l'équation *dy* = *dx* comme exprimant la nature de la cycloïde; parce que *x* repréſente un arc de cercle.

n°. 10); donc $dy = \frac{D\,dx}{C}$, $dx = \frac{C\,dy}{D}$, $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{Cy}{D} = x = PT$; donc dans ces cycloïdes l'on a PT égal à l'abscisse courbe BP (*) c'est-à-dire, que la sous-tangente est quatriéme proportionnelle aux lignes D, C, y.

15. Dans les cycloïdes de tous les ordres, l'on a (courb. transf. n°. 10.) $C^m y^n = D^n x^m$, $n C^m y^{n-1} dy = m D^n x^{m-1} dx$, $dx = \frac{n C^m y^{n-1} dy}{m D^n x^{m-1}}$, $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{n C^m y^n}{m D^n x^{m-1}} = \frac{n D^n x^m}{m D^n x^{m-1}}$ (en substituant la valeur de $C^m y^n$) $= \frac{nx}{m}$; d'où l'on tire $m : n :: x : PT = \frac{nx}{m}$. Si $n = 10$ & $m = 2$, l'on a $PT = 5x$; c'est-à-dire, que dans ce cas la sous-tangente est égale au quintuple de l'abscisse courbe BP. Si la courbe BC est telle qu'en supposant toujours l'arc $BP = x$, $PM = y$, l'on ait $a^m y = x^{m+1} + C x^m$, l'on aura $y = \frac{x^{m+1} + C x^m}{a^m}$, $dy = (\frac{(m+1).\, x^m + C\, m\, x^{m-1}}{a^m}) \times dx$. Substituant la valeur de dy dans $\frac{y\,dx}{dy}$ (car le résultat est le même que si on substituoit la valeur de dx), il vient $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{a^m y}{(m+1)\, x^m + C.\, m\, x^{m-1}} = PT = \frac{x^{m+1} + C\, x^m}{(m+1) x^m + C\, m\, x^{m-1}}$ (en substituant la valeur de $a^m y$) $= \frac{x^2 + C\, x}{(m+1)\, x + C\, m}$, en divisant tout par x^{m-1}, d'où l'on tire $(m+1).\, x +$

(*) Il faut regarder dans ce cas-ci la courbe (CBD) comme une cycloïde de l'espéce dont il s'agit.

$C\,m : x + C :: x : PT$. Si $m = 2$, l'on a $PT = \frac{x^2 + Cx}{3x + 2C}$.

Si la courbe B P R b étoit une ellipſe, en ſuppoſant toujours l'arc $BP = x$, $PM = y$, les expreſſions que nous venons de trouver (13, 14 & 15) auroient encore lieu; mais alors on prendroit P T ſur une tangente elliptique; dans ce cas les équations $y = x$, $C^m y^n = D^n x^m$, &c. repréſenteroient des courbes qu'on peut appeller *cycloïdes elliptiques*.

16. Si on ſuppoſe que B n D ſoit une demi-cycloïde ordinaire, ou allongée, ou raccourcie, ou d'un genre quelconque, & que la courbe B ζ ſoit telle qu'en faiſant l'abſciſſe courbe $B\,n = x$, $n\,N = y$, l'on ait $x = y$, l'on aura $fF = dy$, en ſuppoſant N f parallèle à $n\,t$ tangente au point n de la courbe B n, & les triangles ſemblables F N f, $t\,n\,N$ donneront $fF\,(dy) : fN = nr\,(dx) :: nN\,(y) : nt$ ſous-tangente cherchée $= \frac{y\,dx}{dy}$. Si on ſuppoſe $x = y$, à cauſe de $dx = dy$, l'on aura $n\,t = y = x$. Si l'on ſuppoſe que $C^m : x^m :: D^n : y^n$, l'on aura $D^n x^m = C^m y^n$, & $m\,x^{m-1}\,dx = \frac{n\,C^m y^{n-1}}{D^n}$, $dx = \frac{n\,C^m y^{n-1}\,dy}{m\,D^n x^{m-1}}$, $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{n\,C^m y^n}{m\,D^n x^{m-1}} = \frac{n\,C^m x\,y^n}{m\,D^n x^m}$ (en multipliant le numérateur & le dénominateur par x) $= \frac{n\,x\,D^n x^m}{m\,D^n x^m}$, en ſubſtituant la valeur de $C^m y^n$) $= \frac{nx}{m}$. Si $m = 2$, $n = 5$, l'on aura $n\,t = \frac{5x}{2}$.

Si la courbe B n eſt une parabole, ou une hyperbole d'un genre quelconque, ou encore une courbe quelconque dont on ſache mener les tangentes $n\,t$, il eſt viſible par ce que nous venons de dire, qu'on pourra toujours trouver la ſous-tangente $n\,t$ de la courbe N B, pourvu qu'on ait une équation algébrique entre les abſciſſes courbes B n & les ordonnées rectilignes n N.

17. PROBLÊME. *Soit ſuppoſée* A V N, (*fig.* 7) *une parabole & une autre courbe a l* M *dont les ordonnées* M P *ſont moyennes proportionnelles entre les abſciſſes* P A *& les ordonnées correſpondantes* P N

de la parabole, on demande la ſous-tangente P *b de la courbe* A M. Soit l'ordonnée de la parabole $=y$, l'ordonnée de la courbe A M $=z$, l'abſciſſe AP $=x$, & le paramêtre de la parabole $=p$. L'on aura NR $=$ M $r =$ P $p = dx$, n R $= dy$, $mr = dz$. Suppoſant que la ligne M b eſt tangente de la courbe A M, les triangles mr M, MP b donneront $dz : dx :: z : \frac{z\,dx}{dz} =$ P b; mais par la nature de la courbe $y : z :: z : x$ ou $yx = z^2$, $y\,dx + x\,dy = 2z\,dz$, $dz = \frac{y\,dx + x\,dy}{2z}$, ſubſtituant cette valeur de dz dans $\frac{z\,dx}{dz}$, l'on a P $b = \frac{2z^2\,dx}{y\,dx + x\,dy}$; mais l'équation de la parabole $y^2 = px$ donne $2y\,dy = p\,dx$, $dx = \frac{2y\,dy}{p}$. Subſtituant cette valeur de dx dans l'expreſſion de P b, l'on a P $b = \frac{4zzy\,dy}{p(2yy\,dy + px\,dy)} = \frac{4zzy}{2yy + px} = \frac{4yyx}{2yy + yy\cdot\frac{p}{p}}$ (en ſubſtituant la valeur de zz dans le numérateur, & celle de x dans le dénominateur) $= \frac{4xy^2}{2y^2 + y^2} = \frac{4x}{3}$. Prenant donc A $b = \frac{4PA}{3}$ l'on aura la ſous-tangente cherchée P b.

Il eſt aiſé de comprendre comment il faudroit s'y prendre ſi la courbe A N étoit une hyperbole ou une autre courbe algébrique quelconque.

18. PROBLÊME. *On a deux courbes* A N, A sf (*fig. 8*) *& une troiſiéme courbe* A M *dont les ordonnées ſont ſuppoſées troiſiémes proportionnelles aux ordonnées de la premiere & de la ſeconde, on demande de mener une tangente à la courbe* A M. Soit s l'ordonnée de la premiere, y celle de la ſeconde cour-

be & ζ celle de la troiſiéme courbe AM; donc par la nature de la courbe AM, on a $s : y :: y : \zeta$, ou $s\zeta = y^2$. Soit la ſous-tangente Pt de la premiere courbe $= r$, celle de la courbe A$f = t$, donc $gn = ds$, $fu = dy$, mR $= d\zeta$. Les triangles ſemblables NPt, Nng donnent NP : Pt :: ng : g N, ou $s : r :: ds : g\,\mathrm{N} = \frac{rds}{s}$. Les triangles ſemblables fus, sPa donnent $y : t :: dy : su = \frac{tdy}{y}$. Mais $us = g\,\mathrm{N}$; donc $\frac{tdy}{y} = \frac{rds}{s}$ & $dy = \frac{ryds}{ts}$. Les triangles mMR, MPT donnent Rm : RM $= g$ N :: MP : PT ou $d\zeta$ $\frac{rds}{s} :: \zeta : \mathrm{PT} = \frac{r\zeta ds}{sd\zeta}$. Il ne s'agit donc plus que de faire diſparoître les différentielles ds, $d\zeta$ & les inconnues ζ & s pour avoir la ſous-tangente exprimée en quantités connues; ce que l'on pourra toujours faire, en ſuppoſant que les courbes AN, Af ſont des courbes algébriques quelconques. Suppoſons par exemple que la premiere courbe AN eſt une parabole & la ſeconde une hyperbole. De l'équation $s\zeta = y^2$, l'on tire $\zeta = \frac{yy}{s}$, ou $d\zeta = \frac{2ysdy - y^2ds}{s^2} = \frac{2y^2rsds}{ts^3}$ $- \frac{y^2ds}{s^2}$ (en ſubſtituant la valeur de dy priſe de l'équation $dy = \frac{ryds}{ts}$) $= \frac{2y^2rds - ty^2ds}{ts^2}$.

Subſtituant cette valeur de $d\zeta$ dans $\frac{r\zeta ds}{sd\zeta}$, on trouve $\mathrm{PT} = \frac{rt\zeta ssds}{2rsyyds - tsyyds} = \frac{tsr\zeta}{2ryy - tyy}$.

$= \frac{tsz}{2zsr - tzs} = \frac{t.r}{2r - t}$ (en substituant la valeur sz de y^2); d'où l'on tire $2r - t : t :: r$: PT. Or r & t sont censés connus; donc on connoîtra PT.

Si la courbe AN étoit rentrante comme par exemple un cercle (fig. 9), la différentielle de l'ordonnée PN correspondante au quart de cercle AN seroit $= 0$; car il est visible que les différences des ordonnées vont en diminuant en s'approchant du point N, auquel point elles sont censées nulles, & la tangente étant parallèle aux abscisses AP, les ordonnées pn, NP sont censées égales, & leur différence est censée $= 0$. Donc alors $ds = 0$ (*), & l'équation $dz = \frac{2ysdy - y^2ds}{s^2}$ devient $dz = \frac{2ysdy}{s^2}$. Maintenant (fig. 8) les triangles mMR, MPT donnent dz : RM $= us =$ $\frac{tdy}{y} :: z$: PT $= \frac{ztdy}{ydz} = \frac{szztdy}{2yysdy} = \frac{szt}{2yy}$ $= \frac{szt}{2sz} = \frac{t}{2}$, en substituant la valeur de y^2; donc dans ce cas la sous-tangente PT (fig. 9) est la moitié de la sous-tangente Pa de la parabole, c'est-à-dire, que la sous-tangente PT aboutit au point A.

19. Si l'on suppose (fig. 10) que les ordonnées P m de la courbe A m sont moyennes proportionnelles entre les or-

(*) Cela paroîtra plus clair lorsque nous aurons parlé des *maximis* & *minimis*.

données de la courbe A N & celles de la courbe A s, on trouvera encore la sous-tangente $PT = \frac{rz\,ds}{s\,dz}$; mais alors on a $s : \zeta :: \zeta : y$, $sy = \zeta\zeta$, $s\,dy + y\,ds = 2\zeta\,d\zeta$, $d\zeta = \frac{s\,dy + y\,ds}{2\zeta}$, $PT = \frac{2rz^2\,ds}{s\,s\,dy + s\,y\,ds}$; mais nous venons de trouver (18) $dy = \frac{ry\,ds}{ts}$; donc en substituant cette valeur de dy, l'on a $PT = \frac{2rzz\,ds}{\frac{s\,s\,r\,y\,ds}{ts} + s\,y\,ds} = \frac{2rz^2\,t}{s\,r\,y + s\,t\,y}$ $= \frac{2r\,s\,y\,t}{s\,r\,y + s\,t\,y} = \frac{2rt}{r+t}$; d'où l'on tire $r + t : 2r :: t : PT$; or r & t sont censés connus; donc il sera aisé de connoître la sous-tangente de la courbe A M.

Si la courbe A s (fig. 8) partoit d'un point différent de A, & qu'elle devînt B s (fig. 11), de maniere qu'on eût toujours $PN : PM :: PM : P\,s$, ou $s : \zeta :: \zeta : y$, ou $\zeta\zeta = ys$; à cause que P N augmentant, P s diminue la différentielle de P s seroit $= -\,dy$; donc $PT = \frac{2rzz\,ds}{s\,s\,dy + s\,y\,ds}$ deviendra $= \frac{2rzz\,ds}{s\,y\,ds - s\,s\,dy} = \frac{2rzz\,ds}{s\,y\,ds - \frac{s\,s\,r\,y\,ds}{ts}}$ (en substituant la valeur de dy) $= \frac{2rzz}{s\,y - s\,r\,y} = \frac{2r\,s\,y}{s\,y\,t - s\,r\,y}$ (en substituant la valeur de $\zeta\zeta$) $= \frac{2rs}{t-r}$; donc $t - r : 2r :: s : PT$.

Si (fig. 12 & 13) A N & B s étoient des lignes droites, la courbe BM seroit une section conique. Car soit le rapport du cosinus au sinus de l'angle s B P comme $f : g$ celui du cosinus au sinus de l'angle N A P comme $m : n$; soit de plus B A $= 2a$, B P $= x$; donc P A (fig. 12) $= 2a - x$ & P A (fig. 13) $= 2a + x$. Cela posé, le triangle P B s (on suppose ici les ordonnées perpendiculaires aux abscisses) donne $f : g :: BP : P\,s$ ou $f : g :: x : P\,s = y = \frac{gx}{f}$. Le triangle rectangle N P A donne $m : n :: 2a \mp x : s = \frac{n}{m} \times (2a \mp x)$. Le signe $-$ est pour la fig. 12, dans laquelle

l'angle B eſt aigu, & le ſigne + pour la fig. 13, dans laquelle l'angle *s* B A eſt obtus ; donc $\zeta\zeta = y\ s = \frac{g\ n}{f\ m} \times (2\ a\ x \mp x x)$ $= \frac{b^2}{a^2} \times (2\ a\ x \mp x^2)$, en faiſant le rapport de $g\ n : f\ m$ égal à celui de $b^2 : a^2$. Or cette équation appartient à l'ellipſe, en prenant le ſigne — & à l'hyperbole en prenant le ſigne +. Si $b = a$, l'équation appartient au cercle ou à l'hyperbole équilatere. Si $a = \infty$, c'eſt-à-dire, ſi les points B & A ſont ſuppoſés infiniment éloignés, dans ce cas, le terme x^2 diſparoiſſant devant $a\ x$, l'on aura (en ſuppoſant $\frac{2\ b\ b\ a}{a\ a} = \frac{2\ b\ b}{a} = p$) $\zeta^2 = p\ x$, équation à la parabole.

20. PROBLÊME. *Déterminer la ſous-tangente dans la logarithmique* B M (*fig* 14). Par la nature de cette courbe (voyez les courbes tranſcendantes n°. 3) Lorſque les abſciſſes A P, A *p*, A Q, A *q* ſont en proportion arithmétique, les ordonnées correſpondantes ſont en proportion géométrique ; puiſque les abſciſſes étant ſuppoſées en progreſſion arithmétique, les ordonnées ſont en progreſſion géométrique ; de maniere que les abſciſſes ſont les logarithmes des ordonnées correſpondantes. Donc ſi l'on fait P M $= y$, l'on aura P *m* $=$ P R $+ m$ R $= y + dy$; & ſuppoſant Q N $= u$, l'on a $q\ n = u + du$; donc parce que les abſciſſes A P, A *p*, A Q, A *q* ſont ſuppoſées en proportion arithmétique, l'on a, en faiſant A P $= x$, P *p* $= d\ x =$ Q *q* ; l'on a, dis-je, $y : y + dy :: u : u + du$; on aura donc $y : dy :: u : du$, $\frac{y}{dy} = \frac{u}{du}$. Mais la ſous-tangente P T $= \frac{y\ dx}{dy}$, & par la même raiſon la ſous-tangente Q *t* eſt

$= \frac{u\,dx}{du}$, puiſque $Q\,q = dx$. Mais $\frac{y}{dx} = \frac{u}{du}$; donc $Q\,t = \frac{y\,dx}{dy} = P\,T$, c'eſt-à-dire, que les ſous-tangentes correſpondantes à différentes ordonnées ſont égales entr'elles; donc dans la logarithmique la ſous-tangente eſt conſtante.

21. COROLLAIRE. Si l'on ſuppoſe la ſous-tangente de la logarithmique $= a$, l'on aura $\frac{y\,dx}{dy} = a$ (c'eſt l'équation différentielle de la logarithmique), ou $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$; & en intégrant, S. $\frac{dx}{a}$ = S. $\frac{dy}{y}$, ou $\frac{x}{a}$ = S. $\frac{dy}{y}$; & parce que l'abſciſſe A P $= x$ eſt le logarithme de l'ordonnée correſpondante priſe dans la logarithmique dont la ſous-tangente $= a$, l'on a le théorême ſuivant.

22. THÉORÊME. *L'intégrale* S. $\frac{dy}{y}$ *ou l'intégrale d'une fraction* $\frac{dy}{y}$ *dont le numérateur* dy *eſt la différentielle du dénominateur* y, *eſt le logarithme* x *du dénominateur diviſé par la ſous-tangente* a *de la logarithmique, dans laquelle l'on prend le logarithme.*

Par les mêmes raiſons ſi z eſt l'abſciſſe ou le logarithme d'une ordonnée u dans une autre logarithmique dont la ſous-tangente ſoit b, on aura $\frac{z}{b}$ = S. $\frac{du}{u}$, & ſi l'on ſuppoſe $y = u$, on aura $\frac{z}{b}$ = S. $\frac{du}{u}$ = S. $\frac{dy}{y} = \frac{x}{a}$, & par conſéquent $\frac{z}{b} = \frac{x}{a}$ ou $a\,z = b\,x$; donc $x : z :: a : b$.

Ainſi en ſuppoſant que y & u repréſentent le même nombre, on aura le théorême ſuivant.

23. THÉORÊME. *Les logarithmes d'un même nombre pris dans deux logarithmiques différentes, ſont entr'eux comme les ſous-tangentes de ces logarithmiques.*

Si dans l'équation $\frac{x}{a} = S.\frac{dy}{y}$ (22), on ſuppoſe $a = 1$, on aura $x = L.y$ (L déſigne le logarithme); donc l'intégrale $S.\frac{dy}{y}$ d'une fraction dont le numérateur eſt la différentielle du dénominateur, eſt toujours égale au logarithme du dénominateur en prenant ce logarithme dans le logarithmique dont la ſous-tangente eſt l'unité; ces ſortes de logarithmes ſont appellés *hyperboliques* (*).

Avant de paſſer plus loin, nous allons expoſer les principes généraux de la différenciation & de l'intégration des quantités logarithmiques & exponentielles & de celles qui renferment des ſinus; coſinus, &c. La lettre L déſignera le logarithme hyperbolique.

24. Si l'on ſuppoſe $L.y = x$, ſa différentielle ſera $= \frac{dy}{y}$; puiſque (23) $\frac{x}{a}$, ou $x = S.\frac{dy}{y}$, en faiſant $a = 1$: *c'eſt-à-dire que la différentielle du logarithme hyperbolique d'un nombre y eſt égale à la différentielle de ce nombre diviſée par le même nombre.*

COROLLAIRE. Donc $d.L.x = \frac{dx}{x}$; $d.L.(b+x) = \frac{d(b+x)}{b+x} = \frac{dx}{b+x}$; $S.\frac{dx}{b+x} = L.(b+x)$;

(*) On en verra la raiſon dans la ſuite de cet Ouvrage, (ſect. 2, n°. 7).

S. $\frac{dx}{x}$ = L. x. de même d. L. $(a+x) = \frac{dx}{a+x}$ $= dx \times \frac{1}{a+x} = dx \times 1 \times (a+x)^{-1} = dx \times (a+x)^{-1}$. Elevant $(a+x)$ à la puiſſance $= -1$, par la formule du binome de Newton (voyez la premiere Partie de cet Ouvrage), l'on a $dx \times (a^m + m a^{m-1} x + \frac{m.(m-1)}{2} a^{m-2} x^2 +$ &c.$) = dx \times a^{-1} (1 - x a^{-1} + x^2 a^{-2}$ &c. $) = dx \times a^{-1} \times (1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} -$ &c.$)$, à cauſe de $m = -1$, ou $\frac{dx}{a} - \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{x^2\,dx}{a^3} - \frac{x^3\,dx}{a^4} +$ &c. & S. $\frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} +$ &c, en prenant l'intégrale de chaque terme. Lorſque $x = 0$, cette ſerie eſt $= 0$, mais alors on doit avoir L. a; donc il faut ajouter L. a à cette ſerie, ainſi qu'on pourra le comprendre quand nous aurons parlé dans la ſuite de cet Ouvrage de la conſtante qu'on doit ajouter aux intégrales.

La différentielle de $1 - x$ eſt $= -\frac{dx}{1-x} = -dx.(1-x)^{-1} = -dx - x\,dx - x^2\,dx$ &c. & S. $\frac{dx}{1-x} = -x - x^2 - x^3$ &c. de ſorte que le logarithme hyperbolique de la quantité $1 - x$ plus petite que l'unité eſt négatif; par exemple en ſuppoſant $x = \frac{1}{3}$ le logarithme de $1 - x$ ou de $\frac{2}{3}$ ſera négatif; ainſi en ſuppoſant AB $= 1$ (fig. 14), le logarithme de $fg < 1$ ſera $= g$ A. Or Ag eſt une abſciſſe négative, étant priſe vers la gauche au lieu

que les abſciſſes AP, Ap ſont poſitives; donc $d.\mathrm{L.}\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = d.\mathrm{L.}(a+x - d.\mathrm{L.}(a-x)$ (*) $= \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}) = \frac{2adx}{aa-xx}$ (en réduiſant au même dénominateur) $= 2adx \times (aa-xx)^{-1}$. Elevant $aa-xx$ à la puiſſance -1 par la formule ordinaire $a^m \times \left(1 + \frac{m}{1}\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1\,2}\frac{b^2}{a^2} + \right.$ &c.), en ſubſtituant aa pour a, $-x^2$ pour b, -1 pour m, l'on a $(aa-xx)^{-1} = a^{-2}\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right.$ $+ \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6}$ + &c.) (**); donc $2adx \times$ $(aa-xx)^{-1} = 2a^{-2}dx \times \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \right.$ $\left.\frac{x^4}{a^4} + \text{&c.}\right)$ & $\mathrm{S.}\frac{2adx}{aa-xx} = \mathrm{S.}\frac{dx}{a+x} - \mathrm{S.}\frac{dx}{a-x}$ $= \mathrm{L.}\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \mathrm{S.}2\left(\frac{dx}{a} + \frac{x^2dx}{a^3} + \right.$ $\left.\frac{x^4dx}{a^5} + \text{&c.}\right) = 2.\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7}\right.$ $\left.+ \text{&c.}\right)$ (B). Si l'on ſuppoſe $\frac{a+x}{a-x} = b$, on aura $a + x = ba - bx$, $x + bx = ba - a$, $x = a.\frac{(b-1)}{b+1} = a.f$ en faiſant $\frac{b-1}{b+1} = f$. Subſ-

(*) Parce que (voyez les logarithmes dans la premiere partie de cet Ouvrage) le logarithme du quotient ſe trouve en retranchant celui du diviſeur de celui du dividende.

(**) En faiſant attention que a^2 élevé à l'expoſante -1, eſt $= a^{-2}$, en multipliant 2 par -1.

tituant cette valeur de x dans la formule B & réduisant, il vient $2f + \frac{2f^3}{3} + \frac{2f^5}{5} + \frac{2f^7}{7} + \frac{2f^9}{9} +$ &c. (A) logarithme hyperbolique de $\frac{a+x}{a-x} = b$; & parce que $f = \frac{b-1}{b+1}$ est une fraction plus petite que l'unité, en supposant que b est un nombre entier positif, il est évident que la serie A sera toujours convergente. Or cette serie est égale au double de la somme des puissances impaires de f, en divisant chaque terme par l'exposant de f dans le même terme; donc on aura facilement le logarithme hyperbolique du nombre b. Si $b = 10$, on aura $\frac{b-1}{b+1} = f = \frac{9}{11}$; prenant donc la valeur de la serie A, en s'en tenant à six décimales, l'on a L. $10 = 2.302585$ que nous ferons $= N$.

REMARQUE. Quoique la valeur de x dépende de celle de a, néanmoins la valeur de L. $(\frac{a+x}{a-x})$ ne dépend point de a, mais seulement de b, ce qui mérite d'être remarqué.

REMARQUE 2. Le logarithme de 10 dans les tables est $= 1$; *donc* (23) *le logarithme hyperbolique de* 10, ou N est au logarithme tabulaire 1 du même nombre, comme la sous-tangente 1 de la logarithmique hyperbolique (*) est la sous-tangente M de la logarithmique tabulaire (**); ou N : 1 ::

(*) C'est celle dont la sous-tangente 1.

(**) C'est celle sur laquelle on peut concevoir qu'on a construit les tables ordinaires.

$1 :: M = \frac{1}{N} = \frac{1}{2.302585} = 0.434294$

à peu près en réduiſant $\frac{1}{N}$ en fraction décimale.

COROLLAIRE. Donc en ſuppoſant $= A$ le logarithme tabulaire du nombre B, on aura le logarithme hyperbolique du même nombre, en faiſant (23) M ſous-tangente de la logarithmique des tables eſt à 1 ſous-tangente de la logarithmique hyperbolique, comme A logarithme tabulaire de B eſt à H logarithme hyperbolique de B, ou $M : 1 :: A : H = \frac{A}{M} = AN$, parce que $M = \frac{1}{N}$; donc $A = \frac{H}{N} = HM$; *c'eſt-à-dire que le logarithme hyperbolique d'un nombre eſt égal au logarithme tabulaire du même nombre multiplié par* N, *& le logarithme tabulaire eſt égal ou logarithme hyperbolique multiplié par* M. Nous appellerons *modules* les nombres N & M. Le premier ſera le module des logarithmes hyperboliques, & le ſecond celui des logarithmes tabulaires. On voit maintenant comment par le moyen du logarithme tabulaire d'un nombre on peut déterminer ſon logarithme hyperbolique & réciproquement.

REMARQUE. En ſuppoſant $= e$ le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, l'on aura $L.e = 1$, & $e = 2.7182818$ (premiere partie courb. alg. 47).

$d.L.\left(\frac{a}{a+x}\right) = d.L.a - d.L.(a+x) = 0 - \frac{d.(a+x)}{a+x}$ (à cauſe de la conſtante a dont la différentielle $= 0$) $= \frac{-dx}{a+x}$; donc S. $\frac{-dx}{a+x}$

$= \text{L.}\frac{a}{a+x}$, & S. $-\frac{-b.dx}{a+x} = b\,\text{S.}-\frac{-dx}{a+x}$

$= b.l.\frac{a}{a+x}$. de même S. $-\frac{-dx}{b.(a+x)} = \frac{1}{b}\,\text{S.}$

$\frac{-dx}{a+x} = \frac{1}{b}\cdot\text{L.}\frac{a}{a+x}$; $d.\text{L.}\frac{a}{a-x} = \frac{+dx}{a-x}$;

& S. $\frac{dx}{a-x} = \text{L.}\frac{a}{a-x}$. L'on a auſſi $d.\text{L.}(aa+xx)$

$= \frac{2xdx}{aa+xx}$, & S. $\frac{2mxdx}{aa+x^2} = m\,\text{L.}(aa+xx)$;

$d.\text{L.}(a+x)^m = d.m\,\text{L.}(a+x)$ (*) $= \frac{mdx}{a+x}$

& S. $\frac{mdx}{a+x} = m.\text{L.}(a+x) = \text{L.}(a+x)^m$;

$d.\text{L.}\sqrt{a+x} = d.\text{L.}(a+x)^{\frac{1}{2}} = d.\frac{1}{2}.\text{L.}(a+x)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{dx}{a+x}$, & S. $\frac{1}{2}.\frac{dx}{a+x} = \frac{1}{2}\,\text{L.}(a+x)$

$= \text{L.}(a+x)^{\frac{1}{2}} = \text{L.}\sqrt{a+x}$.

COROLLAIRE. *Donc on trouvera l'intégrale d'une différentielle* $\frac{dx}{a+x}$ *toutes les fois que cette différentielle ſera décompoſable en deux parties, telles que le dividende ſera la différentielle du diviſeur, & l'intégrale ſera alors le logarithme hyperbolique du diviſeur. Mais ſi cette différentielle ſe trouve multipliée par une conſtante quelconque entiere ou fractionnaire, il ſuffira de prendre l'intégrale comme s'il n'y avoit aucun*

(*) Car le logarithme d'une puiſſance d'un nombre eſt égal au produit de l'expoſant de la puiſſance par le logarithme du nombre (voyez la premiere partie de cet Ouvrage).

multiplicateur,

multiplicateur conſtant, & de multiplier enſuite cette intégrale par le multiplicateur conſtant. Ainſi S. $\frac{dx}{1+x}$ étant $=$L.$(1+x)$; S. $\frac{b\,dx}{1+x}$ ſera $=b.\times$ L.$(1+x)$; & S. $\frac{dx}{b(1+x)}$ ſera $=\frac{1}{b}$. S. $\frac{dx}{1+x}=\frac{1}{b}$ L.$(1+x)$, en prenant d'abord l'intégrale de $\frac{dx}{1+x}$, & multipliant cette intégrale par b, dans le premier cas, & par $\frac{1}{b}$, dans le ſecond cas. d. L.$(a+x^m)=\frac{mx^{m-1}dx}{a+x^m}$, & S. $\frac{bmx^{m-1}dx}{a+x^m}=b$. S. $\frac{mx^{m-1}dx}{a+x^m}=b$.L.$(a+x^m)$. l'on a auſſi d.L.$x^m=m.\frac{x^{m-1}dx}{x^m}=\frac{m\,dx}{x}$, & S. $\frac{m\,dx}{x}=m$. S. $\frac{dx}{x}=m$. L.$x=$L.x^m; d.L.xy, $=d$ L.$x+d$.L.y (*)$=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}$, & S.$(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y})=$L.$x+$L.$y=$L.$xy$. On peut auſſi différencier des puiſſances des logarithmes ou même les logarithmes des logarithmes. Pour différencier $(\text{L}.x)^m$, je ſuppoſe $z=(\text{L}.x)^m=y^m$, en faiſant L.$x=y$, pour avoir $dz=my^{m-1}dy$; or $y=$L.x; donc $dy=\frac{dx}{x}$; c'eſt pourquoi en ſubſtituant la valeur de y & de dy, l'on a $dz=m$(L.$x)^{m-1}\times$

(*) Car par la premiere partie de cet Ouvrage le logarithme du produit des deux nombres eſt égal à la ſomme des logarithmes de ces nombres.

$\frac{dx}{x}$, & S. $m(\mathrm{L}.x)^{m-1}.\frac{dx}{x} = z = (\mathrm{L}.x)^m$. Si l'on a $z = x^n.(\mathrm{L}.x)^m$, on pourra différencier en considérant d'abord le facteur x^n comme variable, & l'autre facteur comme constant; pour considérer ensuite le second facteur comme variable, & le premier comme constant, & l'on aura $dz = nx^{n-1}dx(\mathrm{L}.x)^m + mx^n(\mathrm{L}.x)^{m-1}.\frac{dx}{x} = nx^{n-1} \times (\mathrm{L}.x)^m dx + mx^{n-1}(\mathrm{L}.x)^{m-1}dx = x^{n-1}dx \times (\mathrm{L}.x)^{m-1} \times (n\mathrm{L}.x + m)$, & S. $\left(x^{n-1}dx(\mathrm{L}.x)^{m-1} \times (n\mathrm{L}.x + m)\right) = x^n.(\mathrm{L}x)^m$. Soit $z = \mathrm{L}.(\mathrm{L}.x)$, L. (L. x) marque le logarithme du logarithme de x, je fais L. $x = y$, & j'ai $z = \mathrm{L}.y$, $dz = \frac{dy}{y}$; or $dy = \frac{dx}{x}$; donc $dz = \frac{dx}{x\,\mathrm{L}.x}$ & S $\frac{dx}{x\,\mathrm{L}.x} = \mathrm{L}.\mathrm{L}.x = \mathrm{L}.(\mathrm{L}.x)$.

25. Puisque $d.\mathrm{L}.x = \frac{dx}{x}$, on a $x\,d.\mathrm{L}.x = dx$, d'où l'on déduit ce théorême. *La différentielle dx d'une quantité quelconque x est égale au produit de cette quantité par la différentielle de son logarithme.*

COROLLAIRE. Donc la différentielle de y^m sera $y^m d.\mathrm{L}.y^m = y^m.m.\frac{dy}{y} = my^{m-1}dy$; ce qu'on fait d'ailleurs.

La différentielle de la quantité exponentielle a^x (*)

(*) Les *quantités exponentielles* sont celles qui ont des exposans variables, comme x^y qui a un exposant variable y, a^x qui a un exposant variable x qui lui-même a un exposant variable z.

ſera $= a^x d.\text{L}.a^x = a^x dx\,\text{L}.a$; puiſque le logarithme de a^2 eſt $= \text{L}.a^2 = 2\,\text{L}.a$, l'on aura auſſi $\text{L}.a^x = x\,\text{L}.a$; parce que $d.\text{L}.a = 0$. Donc $\text{S}.a^x\,\text{L}.a.dx = \frac{a^x\,\text{L}.a.dx}{\text{L}.a.dx} = a^x$; on a auſſi $b.\text{S}.a^x.\text{L}.a.dx = \frac{b\,a^x\,\text{L}.a\,dx}{\text{L}.a.dx} = ba^x$.

La différentielle de x^y ſera $= x^y d.\text{L}.x^y$; or $\text{L}.x^y = y\,\text{L}.x$, & $d(y\,\text{L}.x) = dy\,\text{L}.x + y\frac{dx}{x}$; donc $d.(x^y) = x^y(dy\,\text{L}.x + y\frac{dx}{x})$. L'on a donc

$$\text{S}.bx^y(dy\,\text{L}.x + \tfrac{y\,dx}{x}) = \frac{bx^y(dy\,\text{L}.x + y\frac{dx}{x})}{dy\,\text{L}.x + yx^{-1}dx} = bx^y;$$

de-là nous tirons le théorême ſuivant.

26. THÉORÊME. *La différentielle d'une quantité exponentielle ſe trouve en multipliant cette quantité par la différentielle de ſon logarithme; & l'intégrale d'une quantité qu'on pourra décompoſer en deux facteurs dont l'un ſoit la différentielle du logarithme de l'autre, que cet autre facteur ſoit multiplié ou non par une conſtante, ſe trouvera en diviſant la différentielle propoſée par la différentielle du logarithme de ce ſecond facteur.*

Ainſi je vois que la différentielle de e^x eſt $= e^x d.\text{L}.e^x = e^x d.(x\,\text{L}.e) = e^x dx\,\text{L}.e = e^x.dx$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt $= 1$; c'eſt-à-dire, que l'exponentielle particuliere e^x a pour différentielle le produit de cette exponentielle même par la différentielle de ſon expoſant; donc $\text{S}.d\,x.e^x = \frac{d\,x.e^x}{dx} = e^x$; $\text{S}.d\,x.e^{ax} = \text{S}.\frac{a.d\,x.e^{ax}}{a} = \frac{a\,d\,x\,e^{ax}}{a\,a\,dx\,\text{L}.e} = \frac{e^{ax}}{a\,\text{L}.e} = \frac{e^{ax}}{a}$, en ſuppo-

ſant = e le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt 1. Dans ce dernier cas, on a introduit le multiplicateur & le diviſeur a, parce que la différentielle de ax eſt $a\,dx$. La différentielle de x^{y^x} eſt $= x^{y^x}\,d.\,\mathrm{L}.x^{y^x} = x^{y^x}.d.(y^x)\mathrm{L}.x)$. Or $d.(y^x\mathrm{L}.x) = y^x\frac{dx}{x} + \mathrm{L}.x\,y^x\,(dz\,\mathrm{L}.y + \frac{z\,dy}{y})$; donc $d.(x^{y^x}) = x^{y^x}.y^z(\frac{dx}{x} + dz.\mathrm{L}.x.\mathrm{L}.y + \frac{z\,\mathrm{L}.x\,dy}{y})$; & S. $x^{y^x}y^z(\frac{dx}{x} + dz.\mathrm{L}.x.\mathrm{L}.y + \frac{z\,\mathrm{L}.x.dy}{y}) = x^{y^x}$.

REMARQUE. Si l'on avoit l'équation $x^x = a$, on trouveroit $\mathrm{L}.x^x$ ou $x\,\mathrm{L}.x = \mathrm{L}.a$. Et réciproquement, on pourroit repaſſer de cette équation logarithmique à l'équation exponentielle $x^x = a$. Cette derniere opération s'appelle *repaſſer des logarithmes aux nombres*. Si on a l'équation $\mathrm{L}.y = x = x\,\mathrm{L}.e$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique = 1, on aura $y = e^x$, qui eſt l'équation d'une logarithmique, dans laquelle $\frac{dy}{y} = dx$, & $\mathrm{L}.y = x\,\mathrm{L}.e = x$.

27. Pour différencier une quantité telle que *ſin.* x ou ſinus de l'arc x, il faut concevoir que cet arc devient $x + dx$, & alors *ſin.* $(x + dx)$ — *ſin.* x eſt la différentielle de *ſin.* x. Or, ſelon ce que nous avons dit (Géom. 136) *ſin.* $(x + dx) = $ *ſin.* x, *coſ.* dx + *ſin.* dx, *coſ.* x, en ſuppoſant le rayon = 1. Mais le ſinus d'un arc infiniment petit dx eſt cenſé égal à cet arc, & ſon coſinus eſt cenſé égal au rayon que je ſuppoſe = 1; donc *ſin.* $dx = dx$, & *coſ.* $dx = 1$; donc *ſin.* $(x + dx)$ — *ſin.* $x = dx \times$ *coſ.* x; c'eſt-à-dire, *que la différentielle du ſinus d'un angle ou d'un arc eſt égale à la*

différentielle de l'angle ou de l'arc par le cosinus de cet angle ou de cet arc : nous supposons que le rayon de l'arc qui mesure cet angle est = 1.

La différentielle de *cos.* x est = *cos.* $(x+dx)$ — *cos.* x. Or selon ce qu'on a dit dans la Géométrie *cos.* $(x+dx) = cos.\,x\,cos.\,dx - sin.\,x.\,sin.\,dx = cos.\,x - sin.\,x\,dx$, à cause de *cos.* $dx = 1$, & de *sin.* $dx = dx$; donc $d\,cos.\,x = -dx\,sin.\,x$; c'est-à-dire, *que la différentielle du cosinus d'un arc dont le rayon* = 1 *est égale au produit de la différentielle de cet arc (prise avec un signe contraire) par le sinus de ce même arc.*

COROLLAIRE. Donc S. $dx.\,cos.\,x = sin.\,x$; S. $-dx.\,sin.\,x = cos.\,x$; $d.(cos.\,5x) = -5\,dx \times sin.\,5x$, & S. $-5\,dx.\,sin.\,5x = cos.\,5x$, parce que la différentielle de l'arc x étant dx, celle de l'arc $5x$ sera $5\,dx$; de même (m étant un nombre constant) $d.(cos.\,mx) = -m\,dx\,sin.\,mx$, & S. $-m\,dx\,sin.\,mx = cos.\,mx$, & par conséquent + S. $m\,dx\,sin.\,mx$ = S. $-1 \times -m\,dx\,sin.\,mx = -1 \times$ S. $-m\,dx\,sin.\,mx = -1.\,cos.\,mx = -cos.\,mx$; $d.(sin.\,mx) = m\,dx\,cos.\,mx$, & S. $m\,dx.\,cos.\,mx = sin.\,mx$; S. $-m\,dx\,cos.\,mx = -sin.\,mx$; S. $a\,m\,dx\,cos.\,mx = a\,sin.\,mx$.

Pour différencier le produit *sin.* $x.\,cos.\,z$, je suppose *sin.* $x = y$ & *cos.* $z = t$; donc $dy = dx.\,cos.\,x$, & $dt = -dz\,sin.\,z$. Or $d(yt) = t\,dy + y\,dt$; donc en substituant les valeurs de y, dy, t, dt, l'on a $d.(sin.\,x\,cos.\,z) = dx\,cos.\,x.\,cos.\,z - dz.\,sin.\,z.\,sin.\,x$, & S. $(dx\,cos.\,x.\,cos.\,z - dz\,sin.\,z.\,sin.\,x) = sin.\,x.\,cos.\,z$.

Pour avoir la différence de $(sin.\,x)^m$, je fais *sin.* $x = y$, & j'ai $dy = dx.\,cos.\,x$; $(sin.\,x)^m = y^m$, $d(sin.\,x)^m = d.(y^m) = m\,y^{m-1}\,dy = m\,(sin.\,x)^{m-1} \times dx.\,cos.\,x$; donc S. $a\,m\,dx\,cos.\,x\,(sin.\,x)^{m-1} =$

$a\,(\mathit{sin.}\,x)^m$; S. $dx\ \mathit{cos.}\,x.\,\mathit{sin.}\,x^{m-1} = \frac{(\mathit{sin.}\,x)^m}{m}$.

Pour avoir la différentielle de $(\mathit{cos.}\,x)^m$, je fais $(\mathit{cos.}\,x)^m = y^m$, $\mathit{cos.}\,x = y$; donc $dy = -dx\,\mathit{sin.}\,x$, & $d.(\mathit{cos.}\,x)^m = m\,y^{m-1}\,dy = -m\,dx\,\mathit{sin.}\,x \times (\mathit{cos.}\,x)^{m-1}$; donc S. $-m\,dx\,\mathit{sin.}\,x\,(\mathit{cos.}\,x)^{m-1} = (\mathit{cos.}\,x)^m$.

Puiſque (voyez la Géométrie) le coſinus eſt au ſinus d'un arc, comme le rayon 1 eſt à la tangente de cet arc, l'on aura la tangente t d'un arc x, ou $t.\,x = \frac{\mathit{sin.}\,x}{\mathit{cos.}\,x}$. Suppoſant $\mathit{sin.}\,x = y$, $\mathit{cos.}\,x = z$, l'on a $d.(\frac{\mathit{sin.}\,x}{\mathit{cos.}\,x}) = d.(\frac{y}{z}) = \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2} = \frac{\mathit{cos.}\,x\,\mathit{cos.}\,x\,dx + \mathit{sin.}\,x.\,\mathit{sin.}\,x.dx}{(\mathit{cos.}\,x)^2} = \frac{(\mathit{cos.}\,x^2 + \mathit{sin.}\,x^2)\,dx}{(\mathit{cos.}\,x)^2} = \frac{dx}{(\mathit{cos.}\,x)^2}$ (*); *donc la différentielle de t. x ou la différentielle de la tangente d'un arc dont le rayon* = 1, *eſt égale à la différentielle de cet arc diviſée par le quarré du coſinus du même arc*; donc S. $\frac{dx}{(\mathit{cos.}\,x)^2} = \mathit{tang.}\,x$, & $d.(t.x) = \frac{dx}{(\mathit{cos.}\,x)^2}$, ou $(\mathit{cos.}\,x)^2.d(t.x) = dx$, & S. $(\mathit{cos.}\,x)^2.d(t.x) = \text{S.}\,dx = x$.

Si on vouloit avoir la différentielle de la cotangente d'un arc x, on feroit attention que $\mathit{cot.}\,x = \frac{\mathit{cos.}\,x}{\mathit{sin.}\,x}$ (**); donc $d(\mathit{cot.}\,x) = d(\frac{\mathit{cos.}\,x}{\mathit{sin.}\,x}) =$

(*) Car (fig. 15) il eſt viſible qu'à cauſe du triangle rectangle b P C, le quarré du rayon C b = 1 eſt égal à la ſomme des quarrés du coſinus C P & du ſinus P b, donc cette ſomme eſt = 1.

(**) Car (Géom. 134) $\mathit{cot} = \frac{\mathit{cos}}{\mathit{sin}}$.

$d\left(\frac{z}{y}\right)$, en faiſant *cof.* $x = z$, & *ſin.* $x = y$, ſera $= \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2} = \frac{-dx\,(\textit{ſin.}\ x)^2 - dx\,(\textit{cof.}\ x)^2}{(\textit{ſin.}\ x)^2}$ $= \frac{-dx \times \left((\textit{ſin.}\ x)^2 + (\textit{cof.}\ x)^2\right)}{(\textit{ſin.}\ x)^2} = \frac{-dx}{(\textit{ſin.}\ x)^2}$ (à cauſe $(\textit{ſin.}\ x)^2 + (\textit{cof.}\ x)^2 = 1$; *donc la différentielle de la cotangente d'un arc x eſt égale à la différentielle de cet arc, priſe avec un ſigne contraire, & diviſée par le quarré du ſinus du même arc*; donc S. $-\frac{dx}{(\textit{ſin.}\ x)^2} = \textit{cot.}\ x$; S. $+\frac{dx}{(\textit{ſin.}\ x)^2} = -\textit{cot.}\ x$; S. $-\frac{b\,dx}{(\textit{ſin.}\ x)^2} = b$. S. $-\frac{dx}{(\textit{ſin.}\ x)^2} = b.\textit{cot.}\ x$.

Pour avoir les différentielles de la ſécante & de la coſécante de l'arc x, je fais attention (fig. 15) que les triangles ſemblables Cag, Cpb donnent (en faiſant l'arc $ar = x$, & le rayon $= 1$) CP : Cb :: Ca : Cg, ou *cof.* x : 1 :: 1 : *ſec.* $x = \frac{1}{\textit{cof.}\ x}$. Les triangles C$ms$, C$nb$, donnent C$n$ = bP = *ſin.* x : Cm :: Cb. : Cs, ou *ſin.* x : 1 :: 1 : *coſec.* $x = \frac{1}{\textit{ſin.}\ x}$. Suppoſant donc $y = \frac{1}{\textit{cof.}\ x}$, j'ai $dy = d.\left(\frac{1}{\textit{cof.}\ x}\right)$, $y \times$ *cof.* $x = 1$, dy *cof.* $x - y\,dx$ *ſin.* $x = 0$ (à cauſe de 1, quantité conſtante); donc dy *cof.* $x = y\,dx$ *ſin.* $x = \frac{1}{\textit{cof.}\ x} \times dx$ *ſin.* x & $dy = \frac{dx\ \textit{ſin.}\ x}{(\textit{cof.}\ x)^2}$.

Donc la différentielle de la ſécante d'un arc x eſt égale à la différentielle de cet arc multipliée par le

ſinus & diviſée par le quarré du coſinus du même arc ; donc S. $\frac{b\,d\,x\,\text{ſin. } x}{(\text{coſ. } x)^2} = b\,\text{ſec. } x$. Mais *tang.* $x = \frac{\text{ſin. } x}{\text{coſ. } x}$, & $\frac{1}{\text{coſ. } x} = \text{ſec. } x$; donc $\frac{\text{ſin. } x}{(\text{coſ. } x)^2} = \text{tang. } x.\,\text{ſec. } x$, & $d.(\text{ſec. } x) = dx.\,\text{tang. } x \times \text{ſec. } x$, ou $dy = d\,x.\,\text{tang. } x.y$ (en faiſant *ſec.* $x = y$), ou $dx = \frac{dy}{y\ \text{tang. } x} = \frac{dy}{y\sqrt{yy-1}}$ (*), & S. $b.\,d\,x\,\text{tang. } x.\,\text{ſec. } x = b.\,\text{ſec. } x$.

Puiſque, comme nous venons de le voir, *coſéc.* $x = \frac{1}{\text{ſin. } x}$, on aura $d.(\frac{1}{\text{ſin. } x}) = d\,z$, en faiſant *coſéc.* $x = z = \frac{1}{\text{ſin. } x}$; ce qui donne $z.\,\text{ſin. } x = 1$, $d\,z \times \text{ſin. } x + z\,dx.\,\text{coſ. } x = 0$, $d\,z\,\text{ſin. } x = -z\,dx \times \text{coſ. } x$, $d\,z = \frac{-z\,d\,x\,\text{coſ. } x}{\text{ſin. } x} = \frac{-d.\,x.\,\text{coſ. } x}{(\text{ſin. } x)^2}$, en ſubſtituant la valeur de z.

Donc *la différentielle de la coſécante d'un arc* x *eſt égale au produit de la différentielle de cet arc (priſe avec un ſigne contraire) multipliée par le coſinus & diviſée par le quarré du ſinus du même arc.*

COROLLAIRE. Donc S. $\frac{b\,d\,x\,\text{coſ. } x}{(\text{ſin. } x)^2} = b\,\text{coſéc. } x$.

Le ſinus verſe P *a* de l'arc *a b* étant égal à C *a*, — C P = 1 — *coſ.* x, la différentielle de *ſin.* $\vee x$ (†) ſera = + $dx\,\text{ſin. } x$, & S. $dx\,\text{ſin. } x = \text{ſin. } \vee x$.

Il n'eſt pas difficile de voir comment on trouve-

(*) Car le quarré de la tangente eſt égal au quarré de la ſécante moins celui du rayon.

(†) L'expreſſion $\vee x$ déſigne le ſinus verſe de l'arc x.

roit les deuxiémes, troiſiémes, &c. différences des lignes dont nous venons de parler. Par exemple, la premiere différence de $\textit{ſin.} \sqrt{x}$ étant $= dx \times \textit{ſin.}\, x$, la ſeconde différence ſera $d\,dx\,\textit{ſin.}\, x + dx \times dx\,\textit{coſ.}\, x = dd\,x\,\textit{ſin.}\, x + (dx)^2\,\textit{coſ.}\, x$, & S. $(dd\,x\,\textit{ſin.}\, x + dx^2\,\textit{coſ.}\, x) = dx\,\textit{ſin.}\, x$.

REMARQUE. Comme on peut exprimer le ſinus de x par $\sqrt{1-(\textit{coſ.}\, x)^2}$, & $\textit{coſ.}\, x$ par $\sqrt{1-(\textit{ſin.}\, x)^2}$, En ſuppoſant le rayon $= 1$, il eſt viſible qu'en introduiſant ces valeurs de $\textit{ſin.}\, x$, & de $\textit{coſ.}\, x$ dans les formules ci-deſſus, on aura des formules différentes.

Pour intégrer $dx\,\textit{ſin.}\, mx.\,\textit{coſ.}\, nx$, on changeroit, ſelon ce qui a été dit (Géom. 170) cette expreſſion en celle-ci, (P) (*) $\frac{1}{2}.\,dx\left(\textit{ſin.}\,(mx+nx)+\textit{ſin.}\,(mx-nx)\right) = \frac{1}{2}.\,\frac{(m+n)\,dx\,\textit{ſin.}\,(m+n).x}{m+n} + \frac{1}{2}\,\frac{(m-n)\,dx\,\textit{ſin.}\,(m-n).x}{m-n}$, qui a pour intégrale $-\frac{1}{2}.\,\frac{\textit{coſ.}\,(m+n)x}{m+n} - \frac{1}{2}\,\frac{\textit{coſ.}\,(m-n)x}{m-n}$, comme on peut le vérifier en différenciant. Pour intégrer $dx\,\textit{ſin.}\, mx.\,\textit{coſ.}\, nx.\,\textit{ſin.}\, p.x$, on convertiroit $\textit{ſin.}\, mx.\,\textit{coſ.}\, nx.\,\textit{ſin.}\, px$ en *ſinus* de la ſomme & de la différence des arcs mx, nx, px. Suppoſons que $\textit{ſin.}\, mx.\,\textit{coſ.}\, nx = \textit{ſin.}\, fx$, nous aurons à intégrer $dx.\,\textit{ſin.}\, fx.\,\textit{ſin.}\, px$. Or, ſelon ce qu'on a dit (Géom. 170) $\textit{ſin.}\, fx.\,\textit{ſin.}\, px = \frac{\textit{coſ.}\,(fx-px) - \textit{coſ.}\,(fx+px)}{2} = \frac{1}{2}.\,\frac{f-p}{f-p} \times \textit{coſ.}\,(f-p)\,x - \frac{1}{2}\,(\frac{f+p}{f+p}) \times \textit{coſ.}\,(f+p).x$; ainſi l'on aura $d\,x.\,\textit{ſin.}\, fx.\,\textit{ſin.}\, p\,x = \frac{1}{2}\,dx \times \frac{(f-p)\,\textit{coſ.}\,(f-p)\,x}{f-p} - \frac{1}{2}\,dx \times \frac{f+p}{f+p} \times \textit{coſ.}\,(f+p)\,x$,

(*) L'on a dit (voyez Géométrie 170), que $\textit{ſin.}\, a.\,\textit{coſ.}\, b. = \frac{\textit{ſin.}\,(a+b)+\textit{ſin.}\,(a-b)}{2}$; d'où l'on déduit facilement l'équation P, en faiſant $a = mx$, $b = nx$.

dont l'intégrale eſt $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin.(f-p)x}{f-p}+\frac{1}{2}\frac{\sin.[f+p]x}{f+p}$,

Si $f=p=1$, l'on a $dx\sin.fx.\sin.px=dx.\frac{\cos.0x}{2}$

$-\frac{1}{2}\frac{2x\cos.2x}{2}=dx\times\frac{1}{2}-dx\frac{2\cos.2x}{4}$, parce que le coſinus d'un arc $=0$ eſt égal au rayon $=1$; donc S. $dx\sin.fx.\sin.px$, devient $=\frac{x}{2}-$ S. $\frac{2dx\cos.2x}{4}$

$=\frac{x}{2}-\frac{\sin.(2x)}{4}=\frac{x}{2}-\frac{\sin.x.\cos.x}{2}$, ce qu'il eſt aiſé de vérifier.

Si l'on avoit à intégrer $dx(\sin.x)^2=dx\sin.x.(\sin.x)^2$, on réduiroit $(\sin.x)^2=\sin.x\sin.x$ en $\frac{1}{2}\cos.(x-x)-\frac{1}{2}\cos.(x+x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos.2x$, & l'on auroit $\frac{dx\sin.x}{2}-\frac{1}{2}\sin.x\cos.2.x$ à intégrer; mais $\frac{1}{2}$ S. $dx\sin.x=-\frac{1}{2}\cos.x$. A l'égard de $dx\frac{1}{2}\sin.x\cos.2x$, on réduira $\sin.x.\cos.2x$, comme on l'a fait pour $\sin.mx.\cos.nx$, & l'intégration ſera facile.

En général, m & r étant des nombres entiers poſitifs, on réduira toutes les formules de cette forme $dx.(\sin.x)^m$, ou de celle-ci $dx.(\sin.ax)^m.(\cos.bx)^m.(\sin.px)^r$ en ſinus ou coſinus de la ſomme ou de la différence des arcs ax, bx, px. Il ſuffit pour cela d'être au fait de ce que nous avons dit ſur les ſinus & coſinus dans notre Géométrie, & d'avoir bien compris ce que nous venons de dire ſur cette matiere.

S. $\frac{dx\cos.x}{\sin.x}=$ L. $\sin.x$; puiſque le dividende de cette fraction eſt la différentielle du diviſeur, ce qui caractériſe (24) la différentielle d'un logarithme. De même S. $-\frac{dx\sin.x}{\cos.x}=$ L. $\cos.x$; S. $\frac{dx}{(\cos.x)^2\,tang.x.}=$ L. $tang.x$, en faiſant attention que la différentielle $\frac{dx}{(\cos.x)^2}$ de la tangente, eſt diviſée par cette même tangente; de même S. $\frac{-dx}{[\sin.x]^2\,cot.x}=$ L. $cot.x$. La différentielle de $ſec.$ étant, ainſi qu'on l'a dit ci-deſſus, $\frac{dx\sin.x}{(\cos.x)^2}$, l'on aura S. $\frac{dx.\sin.x}{(\cos.x)^2.ſec.x}=$

L. *sec.* x, & parce que $d.(\textit{cosec.}\, x) = \frac{-dx\ \textit{cos.}\ x}{[\textit{sin.}\ x]^2}$, l'on a S. $\frac{-dx\ \textit{cos.}\ x}{[\textit{sin.}\ x]^2\ \textit{cosec.}\ x} = $ L. *cosec.* x. Revenons maintenant aux sous-tangentes des courbes.

28. PROBLÊME. Trouver la sous-tangente de la courbe CMB (fig. 16) dont l'équation est (*courbes méchaniques* n°. 5) $\frac{y}{b} = a\ \textit{sin.}\ \frac{x}{c}$, ou $y = b \times a\ \textit{sin.}\ x$, en faisant $c = 1$ (*). Soit z l'arc dont le sinus est x, $b\,z$ sera $= b.\ a\ \textit{sin.}\ x$, $b\,dz = d(b.a.\ \textit{sin.}\ x)$. Pour avoir la différentielle d'un arc dont le sinus $r\,l$ est $= x$ (fig. 15), ayant tiré $r\,i$ perpendiculaire sur P b, le triangle rectangle $b\,r\,i$ (on considere l'arc infiniment petit $r\,b$ comme une ligne droite) sera semblable au triangle C b P, parce que ces triangles ont leurs côtés perpendiculaires, ce qui les rend semblables; donc $r\,b = d\,y$ (en faisant l'arc $a\,r = y$) : $b\,i = dx$ (on fait $r\,l = x$) :: C $b = 1$: C P $= \textit{cos.}\ y$; donc $dy = \frac{dx}{\textit{cos.}\ y}$; *c'est-à-dire, que la différentielle d'un arc est égale à celle de son sinus, divisée par le cosinus du même arc*; donc $d.(b.a.\ \textit{sin.}\ x) = dy = \frac{b\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ (**); donc $dx = dy.\ \frac{\sqrt{(1-xx)}}{b}$, & PT $= \frac{y\,dx}{dy} = y\,\frac{\sqrt{(1-xx)}}{b}$

(*) C'est-à-dire que dans cette courbe les ordonnées sont égales au produit de b par l'arc E F correspondant dont le sinus, est $= x =$ C P, & l'ordonnée P M $= y$, le rayon C A du cercle étant $= c = 1$; a désigne l'arc dont le sinus est x.

(**) x étant le sinus $\sqrt{(1-xx)}$ est le cosinus.

$= a\ fin.\ x.\sqrt{(1 - x\,x)}$ d'où l'on tire (pour la fig. 16.) $CA = 1 : FE :: PE : PT$.

29 PROBLÊME. *Trouver la ſous-tangente de la courbe* CDN, *dont l'équation eſt* $y = x^x$, ou $L.y = x.\ L.\ x$ (*fig.* 17). De l'équation $L.y = x\ L.\ x$, ou $1 \times L.y = x\ L.\ x$, l'on tire $1 : L.\ x :: x : L.y$. Pour décrire cette courbe, ayant décrit une logarithmique BL, on prendra une ordonnée BA (ſur cette logarithmique) qu'on ſuppoſera $= 1$ (*), en faiſant $PM = x$; alors AP ſera $= L.x$, & prenant la ligne AB pour axe, ſi l'on fait $AQ = PM$, & qu'on tire QR parallèle à BP juſqu'à la rencontre de l'axe AP de la logarithmique BL, on aura $AR = x\ L.\ x$; car les triangles ſemblables ABP, AQR donnent $AB : AP :: AQ = PM : AR$, ou $1 : L.x :: x : AR = x.\ L.\ x = L.y$. Menant donc QN parallèle & égale à AR, le point N appartiendra à la courbe cherchée; on s'y prendra de même pour trouver d'autres points de cette courbe. Si on ſuppoſe $x = 0$, ce qui arrive au point C, alors $L.y = 0$, & 0 étant le logarithmique de $1 = AB$, on aura $AC = 1 = AB$; donc la courbe paſſe par le point C. Si $x = 1$, $L.x = 0$, $L.y = 0$ & $y = 1$; donc l'appliquée BD au point B eſt $= 1$.

Revenons à notre problême. De l'équation $L.y = x\ L.x$, l'on tire $\frac{dy}{y} = dx.\ L.\ x + x.\ \frac{dx}{x}$, ou $dy = y\ L.\ x.\ dx + y\,dx$. Subſtituant cette valeur de dy dans la formule $\frac{y\,dx}{dy}$, l'on a la ſous-tangente $= \frac{1}{L.\ x + 1} = \frac{1 \times 1}{L.\ x + 1}$ (**); c'eſt-à-dire,

(*) C'eſt-à-dire d'un pied, ſi l'on veut, d'un pouce, &c.

(**) Cette ſous-tangente doit être priſe, non ſur l'axe AP

que la ſous-tangente eſt troiſiéme proportionnelle à AP + AB & AB.

30. PROBLÊME. *Trouver la ſous-tangente des ſpirales de tous les genres, dont l'équation (courb. tranſc. 6) eſt* $c^n y^m = r^m x^n$. *Suppoſons que* A*n* (*fig. 18*) *puiſſe repréſenter ces ſortes de courbes*; ayant tiré les rayons infiniment proches CB, C*p*, & décrit du point C comme centre, l'arc infiniment petit *nm* avec le rayon C*n* de la ſpirale, & ayant de plus mené la tangente NT, la ligne CT perpendiculaire à BC ſera la ſous-tangente cherchée.

En faiſant l'arc A*p* = *x*, le rayon C*n* de la ſpirale = *y*, *p*B = *dx*, N*m* = *dy*, les ſecteurs ſemblables BC*p*, *m*C*n*, donnent C*p* = *r* : C*n* = *y* :: *p*B (*dx*) : *nm* = $\frac{y\,dx}{r}$. Cela poſé, l'arc *nm* étant cenſé égal à une ligne droite infiniment petite perpendiculaire ſur NC = *y*, les triangles rectangles NCT, N*nm* ſont cenſés ſemblables, & donnent N*m* (*dy*) : *nm* ($\frac{y\,dx}{r}$) :: NC (*y*) : CT = $\frac{yy\,dx}{r\,dy}$; mais l'équation $c^n \times y^m = r^m x^n$ donne $m\,c^n y^{m-1}\,dy = n\,r^m\,x^{n-1} \times dx$, $dx = \frac{m\,c^n y^{m-1}\,dy}{n\,r^m x^{n-1}}$. Subſtituant cette valeur de *dx* dans l'expreſſion de CT, l'on a CT = $\frac{m\,c^n y^{m+1}}{n\,r^m . r\,x^{n-1}} = \frac{m\,c^n y^{m+1} x}{n\,r^m x^n r}$ (en multipliant le nu-

---

de la logarithmique, mais ſur l'axe PB (des *x* de la courbe propoſée ; de ſorte que la tangente au poin. D eſt = D*i* & non pas = DT.

mérateur & le dénominateur par x) $= \frac{m r^m x^n y x}{n r^m x^n}$

(en ſubſtituant la valeur de $c^n y^m$) $= \frac{m x y}{n r}$.

Si $m = n = 1$, comme dans la ſpirale d'Archimèdes, dans laquelle l'on a $c y = r x$, la ſous-tangente ſera $= \frac{x y}{r}$, d'où l'on tire $r : x :: y :$ CT. Si $y = r$, ce qui arrive au point A, alors x eſt égal à la circonférence c du cercle générateur, & CT $= x = c$; donc on auroit géométriquement une ligne droite égale à la circonférence du cercle, & par conſéquent ſa quadrature, ſi on pouvoit mener géométriquement une tangente au point A de la ſpirale d'Archimède. Si $m = 5$, & $n = 3$, l'on a CT $= \frac{5 x y}{3 r}$, d'où l'on tire $3 r : 5 x :: y :$ CT; prenant donc une ligne quatriéme proportionnelle au triple du rayon, au quintuple de l'abſciſſe circulaire x & au rayon correſpondant de la ſpirale, on aura la longueur de la ſous-tangente.

Si dans l'équation $c^n y^m = r^m x^n$, on ſuppoſe $n = -1$ & $m = 1$, on aura $\frac{y}{c} = \frac{r}{x}$, ou $y x = c r$. Subſtituant ces valeurs de m, n & $y x$ dans $\frac{m x y}{n r}$, l'on a CT $= -c$; c'eſt-à-dire, que dans cette ſpirale la ſous-tangente eſt conſtante & égale à la circonférence du cercle générateur, ou à l'arc c, ſi c ne déſigne qu'une partie de cette circonférence. Le ſigne — ne changeant rien à la grandeur de la ſous-tangente $-c$, on pourra faire quelquefois dans la ſuite cette ſous-tangente $= c$.

Pour trouver la ſous-tangente de la ſpirale loga-

rithmique, je remarque que dans cette ſpirale, l'angle ACB ou l'arc AB $= x$, étant le logarithme du rayon correſpondant CN, l'on a (voyez les courbes tranſcendantes n°. 7) $x = n$ L. $\frac{y}{c} = n$. L. y, en faiſant $c = 1$; donc $dx = n. \frac{dy}{y}$, & CT $= \frac{yy\,dx}{r\,dy} = \frac{ny}{r}$; d'où l'on tire $r : n :: y :$ CT. Si $n = 1 = r$, CT ſera $= y$. Donc pour une autre ordonnée z, l'on aura la ſous-tangente $= \frac{nz}{r}$; donc ces deux ſous-tangentes ſeront entr'elles, comme les rayons y & z, & les deux triangles rectangles formés par les tangentes, ſous-tangentes & rayons correſpondans, ayant les côtés qui comprennent l'angle droit (ſavoir les ſous-tangentes & les rayons) proportionnels ſeront ſemblables, & par conſéquent les angles que forment les rayons avec les tangentes (ou, ce qui revient au même, avec la courbe) ſont égaux entr'eux; ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit dans la premiere Partie, courbes tranſcendantes (7).

REMARQUE. On trouvera toujours la valeur de la ſous-tangente $\frac{yy\,dx}{r\,dy}$ pour toutes les courbes, telles que les ordonnées partent d'un point fixe, pourvu qu'on puiſſe avoir une équation entre ces ordonnées y, & les arcs de cercle décrits d'un rayon $= r$ (qu'on pourra, ſi l'on veut, faire $= 1$), qui meſurent les angles que les ordonnées font avec une ligne donnée, ou avec l'ordonnée qui paſſe par le point d'où l'on commence à compter les abſciſſes circulaires.

31. PROBLÊME. BM (*fig. 19*) *étant supposée une courbe dont on puisse connoître la sous-tangente*, CQ *pour un point quelconque* M, *trouver la sous-tangente* CT *de la courbe* bN, *en supposant qu'on connoît la relation entre les ordonnées* MC $= z$, *& les ordonnées* CN $= y$. Du point C avec les rayons z & y, décrivez les arcs infiniment petits Mr, Ns, tirez les autres lignes qu'on voit dans la figure, & faites CQ $= m$, quantité qui est censée connue. les triangles CQM, mMr ayant les angles C & r droits, & les angles M & m égaux (*), sont semblables. Donc CM : CQ :: mr : Mr, ou $z : m :: dz$: M$r = \frac{m\,dz}{z}$; mais les secteurs semblables CMr, CNs donnent CM : CN :: Mr : Ns, ou $z : y :: \frac{m\,dz}{z}$: N$s = \frac{m\,y\,dz}{zz}$. Maintenant les triangles semblables Nns, NCT, donnent ns : Ns :: NC : CT, ou $dy : \frac{m\,y\,dz}{zz} :: y$: CT $= \frac{m\,yy\,dz}{zz\,dy}$.

Si on suppose que l'on ait toujours MN $= mn = b$, alors $y = z + b$; donc $dy = dz$ & CT $= \frac{m\,yy}{zz}$ (**), qu'on construira ainsi ; par les points M & Q, ayant tiré la tangente MQ, on lui menera par le point N la parallèle Ng ; tirant ensuite gM, on menera NT parallèle à gM, & la

(*) Car ces angles différent infiniment peu, à cause des points M & m infiniment proches.

(**) Car alors $\frac{dz}{dy} = 1$.

ligne

ligne CT sera la sous-tangente cherchée; car les triangles semblables CMq, CNg donnent CM (z) : Cq (m) :: CN (y) : C$g = \frac{my}{z}$. Les triangles semblables, CMg, CNT donnent CM : Cg :: CN : CT, ou $z : \frac{my}{z} :: y : \mathrm{CT} = \frac{myy}{zz}$.

Si la ligne MB est droite & qu'on fasse toujours MN $= ab = b$, l'on aura la conchoïde de Nicomède (voyez les courbes algébriques n°. 69).

Si l'on suppose que l'équation de la courbe Nb soit $y^{M} = z^{n} a^{M-n} = z^{n} a^{r}$, en faisant M $- n = r$, l'on aura $My^{M-1} dy = n a^{r} z^{n-1} dz$, $dz = \frac{My^{M-1} dy}{n a^{r} z^{n-1}}$. Substituant cette valeur de dz dans $\frac{myy\,dz}{zz\,dy}$, l'on a $\mathrm{CT} = \frac{\mathrm{M}.my.y^{M}}{nza^{r}z^{n}} = \frac{\mathrm{M}\,my\,a^{r}z^{n}}{nza^{r}z^{n}} = \frac{\mathrm{M}\,my}{nz}$. Si M $= 5$ & $n = 2$, l'on aura CT $= \frac{5my}{2z}$, d'où l'on tire $2z : 5m :: y :$ CT; c'est-à-dire, que la sous-tangente est alors quatrième proportionnelle au double de l'ordonnée CM, au quintuple de la sous-tangente Cq, & à l'ordonnée CN.

Application du calcul différentiel aux tangentes, sous-normales & normales, à la méthode de déterminer l'angle de la courbe avec une ligne parallèle aux abscisses ou aux ordonnées, & aux asymptotes des courbes.

32. Etant donnée la sous-tangente PT (fig. 1), par le point T extrémité de la sous-tangente &

le point m extrémité de l'ordonnée correſpondante, on menera la ligne mT, qui ſera évidemment la tangente cherchée ; car la poſition d'une ligne droite ne dépend que de deux points ; il ſuffit donc de déterminer la ſous-tangente par la méthode précédente, ou par une autre méthode. Néanmoins pour déterminer la tangente par le calcul différentiel, je remarque que les triangles mnR, mPT étant ſemblables, l'on a Rn : mn :: mP : mT ; mais R$n = dy$, & $(mn)^2 = (m\mathrm{R})^2 + (n\mathrm{R})^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ (*) ; donc $mn = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$; donc $dy : \sqrt{(dx^2+dy^2)} :: y : m\mathrm{T} = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, tangente cherchée que nous ferons $= t$. Si l'on ſubſtitue dans cette formule la valeur de dx^2, tirée de l'équation de la courbe, l'on aura la valeur de la tangente cherchée.

Dans la parabole dont l'équation eſt $y^2 = px$, l'on a $2y\,dy = p\,dx$, $dx = \frac{2y\,dy}{p}$, $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$; donc l'on aura $t^2 = \frac{y^2dx^2+y^2dy^2}{dy^2} = y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}$. Subſtituant maintenant la valeur de dx^2, que nous venons de trouver, il vient $t^2 = y^2 + \frac{4y^4}{p^2}$ $= px + \frac{4p^2x^2}{p^2} = px + 4xx$, en ſubſtituant la valeur de y^2 ; donc $t = \sqrt{px + 4xx}$.

Il ſera cependant plus commode, ayant la va-

(*) On ſuppoſe ici que l'angle que font les ordonnées avec les abſciſſes, eſt droit.

leur de la ſous-tangente que je ſuppoſerai $= R$, de faire $t = \sqrt{(R^2 + y^2)}$ (*), & l'on trouvera la même valeur de la tangente. Par exemple, la ſous-tangente de la parabole étant $= 2x$, ainſi qu'on l'a dit ci-deſſus, l'on a $t = \sqrt{(4xx + yy)} = \sqrt{4xx + px}$.

Dans les paraboles des genres ſupérieurs, la ſous-tangente eſt $= \frac{(m+n)x}{n}$ (10) $= \frac{s.x}{n}$, en faiſant $m + n = s$; donc $R^2 = \frac{s^2x^2}{n^2}$, & $t = \sqrt{(\frac{s^2x^2}{n^2} + y^2)}$, expreſſion dans laquelle on peut, ſi l'on veut, ſubſtituer la valeur de y^2.

Dans la ſpirale d'Archimède, la ſous-tangente eſt $= \frac{xy}{r}$ (30); donc $t^2 = \frac{xxyy}{r^2} + y^2 = \frac{xxyy + r^2y^2}{r^2}$. Or dans cette ſpirale $cy = rx$, $y = \frac{rx}{c}$, $y^2 = \frac{r^2x^2}{c^2}$; donc $t^2 = \frac{x^4 + r^2x^2}{c^2}$, & $t = \sqrt{(\frac{x^4 + r^2x^2}{c^2})}$. Dans la ſpirale hyperbolique $R = c$; donc $t = \sqrt{c^2 + y^2}$. Dans la ſpirale logarithmique $R = \frac{ny}{r}$ (30) $= ny$, en faiſant $r = 1$; donc $t = \sqrt{nnyy + y^2} = \sqrt{2y^2}$, en ſuppoſant $n = 1$. Dans la logarithmique la ſous-tangente eſt $= a$ (21); donc $t = \sqrt{aa + yy}$.

(*) t eſt l'hypothénuſe d'un triangle rectangle, dont R & y ſont les côtés. On voit bien que nous ſuppoſons que l'on a trouvé R, dans la ſuppoſition que l'angle des co-ordonnées eſt droit.

33. PROBLÊME. *Trouver la formule générale de la ſous-normale* PL (*) *dans une courbe algébrique* (*fig.* 1). Les triangles *m n* R, P *m* L ayant leurs côtés perpendiculaires (**), ſont ſemblables ; donc *m* R : *n* R :: *m* P : P L, ou $dx : dy :: y : PL = \frac{y\,dy}{dx}$. Si dans cette valeur on ſubſtitue la valeur de dx, ou celle de dy priſe de l'équation à la courbe, l'on aura la ſous-normale que nous appellerons u, exprimée en termes finis.

Dans la parabole, l'on a $y^2 = ax$, $2y\,dy = a\,dx$, $dy = \frac{a\,dx}{2y}$. Subſtituant cette valeur dans $u = \frac{y\,dy}{dx}$, l'on aura $u = \frac{ay}{2y} = \frac{a}{2}$; c'eſt-à-dire, que dans la parabole la ſous-normale eſt conſtante & égale à la moitié du paramêtre.

Dans les paraboles des genres ſupérieurs, l'on a (10) $dx = \frac{(m+n)y^{m+n-1}\,dy}{n\,a^m\,x^{m-1}}$. Subſtituant cette valeur dans u, ou, ce qui revient au même, diviſant $y\,dy$ par cette quantité, il vient $u = \frac{n\,a^m\,x^{m-1}\,y}{(m+n)\,y^{m+n-1}} = \frac{n\,a^m\,x^m\,y^2}{(m+n)\,xy^{m+n}}$ (en multipliant tout, c'eſt-à-dire, le numérateur & le dénominateur par xy) $= \frac{n\,yy\,.\,y^{m+n}}{(n+m)\,xy^{m+n}}$

(*) La *ſous-normale* eſt la partie de l'axe compriſe entre l'ordonnée P *m*, & la rencontre de la normale ou perpendiculaire *m* L à la tangente.

(**) On ſuppoſe l'angle des ordonnées droit.

(en ſubſtituant la valeur de $a^m x^n$) $= \frac{ny^2}{(n+m)x}$. Si $n = m = 1$, comme dans la parabole vulgaire, l'on a $u = \frac{y^2}{2x} = \frac{ax}{2x} = \frac{a}{2}$, a eſt le paramêtre. Si $n = 7$ & $m = 3$, u ſera $= \frac{7yy}{10x}$; d'où l'on tire $10x : 7y :: y : u$.

Dans les courbes dans leſquelles $y^m x^n = a^{m+n} = 1$ (*), en faiſant $a = 1$, ou $y^m = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, ou $y = x^{-\frac{n}{m}} = x^r$ (en faiſant $-\frac{n}{m} = r$), l'on a $dy = rx^{r-1}dx$; ſubſtituant cette valeur de dy dans $\frac{ydy}{dx}$, il vient $u = ryx^{r-1} = \frac{ryx^r}{x}$. $= \frac{ryy}{x}$ (à cauſe de $y = x^r$). Si $m = 2$ & $n = 10$, l'on a $r = -5$ & $u = -\frac{5yx}{x}$. Ainſi dans ces courbes la ſous-normale PL étant négative (fig. 2) doit être priſe en allant vers l'origine A des abſciſſes.

Dans l'ellipſe, en comptant les abſciſſes depuis le centre, l'on a $y^2 = \frac{bb}{aa} \times (aa - xx)$, $2ydy = -\frac{2bbxdx}{aa}$, $dy = \frac{-bbxdx}{yaa}$, $u = \frac{ydy}{dx}$

(*) Toutes les courbes dans leſquelles le produit d'une puiſſance poſitive de l'ordonnée, par une puiſſance poſitive de l'abſciſſe, eſt égal à une quantité conſtante, ſont appellées hyperboles.

$= -\frac{bbx}{aa}$ (*). Dans le cercle $b = a$, & $u = -x$; c'eſt-à-dire, que la ſous-normale du cercle eſt égale à l'abſciſſe comptée depuis le centre.

REMARQUE. En appellant la ſous-tangente R, l'on a (par la propriété du triangle rectangle T m L) (fig. 1) T P : m P :: m P : P L, ou R : y :: y : $u = \frac{yy}{R}$. Connoiſſant donc la ſous-tangente, on aura facilement la ſous-normale; de plus la formule $\frac{yy}{R}$ ſervira également pour les courbes dont les ordonnées partent d'un point : mais alors on prend la ſous-normale C L (fig. 18) ſur le prolongement de la ſous-tangente T C.

Dans la courbe dont l'équation eſt $y = x^x$ (fig. 17) la ſous-tangente R étant (29) $= \frac{1}{1+\text{L.}x}$, l'on a $u = \frac{yy(1+\text{L.}x)}{1}$, d'où l'on tire $1 : yy :: 1 + \text{L.}x : u$, ou (à cauſe de $y = x^x$, ce qui donne $y^2 = x^{2x}$) $1 : x^{2x} :: 1 + \text{L.}x : u$.

Dans la courbe dont l'équation eſt $y = b.\, a\, ſin.\, x$, la ſous-tangente R eſt (28) $= a\, ſin.\, x \sqrt{(1 - xx)}$, $\frac{y^2}{R} = \frac{b.\, a\, ſin.\, x.}{\sqrt{(1-xx)}}$; d'où l'on tire $\sqrt{(1 - xx)} : b :: a\, ſin.\, x : u$.

Dans les ſpirales de tous les genres, dans leſquelles la ſous-

(*) Le ſigne — indique qu'il faut prendre la ſous-normale P L (fig. 4), en allant vers l'origine C des abſciſſes, au lieu qu'en comptant les abſciſſes depuis l'origine A du diamètre, on la prendroit en s'éloignant de cette origine; mais dans l'hyperbole, dont l'équation eſt $y^2 = \frac{bb}{aa} \times (x^2 - a^2)$, on aura $u = \frac{bbx}{aa}$; donc alors il faudra prendre u, en s'éloignant de l'origine des x.

tangente C T (fig. 18) eſt (30) $= \frac{mxy}{nr}$, l'on a $\frac{yy}{R}$ $= \frac{nryy}{mxy} = \frac{nry}{mx}$. Si $m = 3$ & $n = 7$, l'on a $u = \frac{7ry}{3x}$, ou $3x : 7r :: y : u =$ CL. On trouveroit la même choſe, ſi au lieu de diviſer y^2 par la ſous-tangente exprimée en termes finis, l'on diviſoit par la ſous-tangente $\frac{yydx}{rdy}$ (ce qui convient dans ce cas), pour avoir $u = \frac{rdy}{dx}$, d'où l'on tireroit la même valeur; mais lorſqu'on a R en termes finis, il eſt inutile d'employer le calcul différentiel.

Dans la ſpirale hyperbolique, l'on a (30) $R = c$; donc $u = \frac{yy}{c}$, ou $c : y :: y : u$. Dans la ſpirale logarithmique (30) $R = \frac{ny}{r}$; donc $u = \frac{ry}{n}$, ou $n : r :: y : u$. Si $n = r = 1$, l'on a $u = y$; mais alors (30) $R = y$; donc dans ce cas la ſous-normale eſt toujours égale à la ſous-tangente.

REMARQUE. La ſous-tangente des courbes algébriques qui ont leurs ordonnées parallèles, eſt $= \frac{ydx}{dy}$, ainſi qu'on l'a vu ci-deſſus. Si on diviſe y^2 par cette quantité, l'on aura $u = \frac{ydy}{dx}$ (*), comme ci-deſſus.

34. PROBLÈME. *Trouver l'expreſſion générale de la normale dans une courbe algébrique dont les ordonnées ſont perpendiculaires aux abſciſſes.* Les triangles ſemblables mnR, mPL (fig. 1) donnent $mR : mn :: mP : mL$, ou $dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} :: y : mL = \frac{y}{dx} \times \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

(*) Cette formule ſuppoſe que la courbe eſt rapportée à l'axe.

Dans la parabole $y^2 = px$, $2ydy = pdx$, $dy = \frac{pdx}{2y}$, $dy^2 = \frac{ppdx^2}{4yy}$; donc $mL = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + \frac{ppdx^2}{4y^2})} = \frac{ydx}{dx} \times \sqrt{(\frac{4yy+pp}{4y^2})} = \frac{y}{2y}\sqrt{(4yy+pp)} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(4px+pp)}$.

Il eſt évident qu'en appellant la ſous-normale u, l'on aura la normale $M = \sqrt{(uu+yy)}$, ce qui eſt général pour toutes les courbes, & même celles dont les ordonnées partent d'un même point.

Dans la ſpirale hyperbolique, l'on a (33) $u = \frac{yy}{c}$; donc $M = \sqrt{(\frac{y^4}{c^2}+y^2)} = \sqrt{(\frac{y^4+c^2y^2}{c^2})} = \frac{y}{c}\cdot\sqrt{(4y^2+c^2)}$, d'où l'on tire $c : y :: \sqrt{(4y^2+c^2)} : M$.

Il eſt évident qu'ayant la ſous-normale P L. (fig. premiere), il ſuffit de mener (par l'extrémité L de la ſous-normale & l'extrémité m de l'ordonnée correſpondante) la ligne mL, qui ſera la normale de la courbe A m.

REMARQUE I. La formule de la ſous-normale $\frac{ydy}{dx}$ ſuppoſe que l'angle des ordonnées eſt droit. S'il étoit oblique, on changeroit (courbes algébriques 5) l'équation de la propoſée en une autre, dans laquelle cet angle ſeroit droit, & l'on auroit enſuite facilement la ſous-normale.

REMARQUE II. Nous n'avons appliqué la formule de la ſous-tangente qu'aux courbes dont on a l'équation en termes finis, pour faire voir ſon uſage dans les courbes dont l'équation renferme des différentielles, ſoit propoſé de trouver la ſous-tangente de la

courbe dont l'équation eſt $dx = \frac{-dy\sqrt{(aa-yy)}}{y}$ (*); donc $\frac{ydx}{dy} = -\sqrt{(aa-yy)}$. Mais la ſous-tangente eſt $= \frac{ydx}{y}$; donc dans cette courbe, la ſous-tangente $= -\sqrt{(aa-yy)}$. Maintenant, parce que le quarré de la tangente eſt égal à la ſomme des quarrés de l'ordonnée & de la ſous-tangente, & que le quarré de la ſous-tangente eſt $= aa-yy$ (**), l'on a le quarré de la tangente $= yy+aa-yy = aa$, & la tangente $= a$; donc dans cette courbe la tangente eſt conſtante.

Suppoſons une autre courbe dont l'équation ſoit $2aydx = dy(aa-yy)$, dont on demande la ſous-tangente. Donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{aa-yy}{2a}$, d'où l'on tire $2a : a+y :: a-y$: R ſous-tangente cherchée.

Soit l'équation de la courbe $3xdy = dx \times (\frac{aa-xx}{y})$ dont on demande la ſous-normale u. L'on aura donc $\frac{ydy}{dx} = \frac{aa-xx}{3x}$; ainſi $3x : a+x :: a-x : u$.

35. PROBLÊME. *Trouver l'expreſſion de la ligne* AT *compriſe entre l'origine* A *des abſciſſes & la rencontre de la tangente* (*fig.* 1). Si

(*) Nous appellerons cette courbe *tractrice*, nous en donnerons la conſtruction dans la ſuite de cet Ouvrage.

(**) On met $aa-yy$ au lieu de $-(aa-yy)$, parce que le quarré d'une quantité négative $-b$ eſt $= bb$.

de P T l'on retranche A P, l'on aura A T $= \frac{y\,dx}{dy} - x = \frac{y\,dx - x\,dy}{dy}$. Pour avoir l'expreſſion de A B, on fera P m : P T :: A T : A B, ou $\frac{y\,dx}{dy} : y :: \frac{y\,dx - x\,dy}{dy}, \frac{y\,dx - x\,dy}{dx}$ = A B.

36. PROBLÊME. *étant donnée une courbe* A m (*dans laquelle l'angle des co-ordonnées eſt droit*), *trouver le point auquel cette courbe fait un angle donné avec une ligne parallèle aux abſciſſes ou aux ordonnées* (*fig.* 1). L'angle $n\,m$ R eſt l'angle que fait la ligne m R parallèle aux abſciſſes avec la courbe ou avec la tangente à la courbe au point m, & l'angle $m\,n$ R eſt l'angle que fait la courbe avec l'ordonnée correſpondante $p\,n$. Or le triangle rectangle $m\,n$ R donne (Voyez la Géométrie) m R : nR :: r (rayon) : tangente de l'angle $n\,m$ R = T, ou en faiſant $r = 1$, $dx : dy :: 1 : T = \frac{dy}{dx}$. Le même triangle donne $dy : dx :: 1 : t = \frac{dx}{dy}$, tangente de l'angle R $n\,m$. Il ſuffit donc d'égaler ces formules à la tangente de l'angle donné, pour en déduire enſuite, par le moyen de l'équation de la courbe, la valeur de l'ordonnée ou de l'abſciſſe correſpondante.

Si l'on demande, par exemple, à quel point de la parabole l'angle que forme la courbe avec une ligne parallèle à l'axe eſt de 45°. Comme la tangente de 45° eſt égale au rayon = 1, l'on a $\frac{dy}{dx} = 1$, $dy = dx$. Or par la nature de la parabole, $yy = px$, $2y\,dy = p\,dx$; & parce que par la nature du problême dy doit être $= dx$, l'on

à $2ydx = pdx, 2y = p, y = \frac{p}{2}$. Mais (Sections coniques 8) l'ordonnée qui passe par le foyer est égale au demi-paramètre; donc dans toutes les paraboles, l'angle de la courbe avec une ligne parallèle à l'axe, est de 45° au point correspondant au foyer.

Si l'on demande à quel point la tangente de l'angle de la courbe & de l'ordonnée sera égale au demi-rayon $= \frac{1}{2}$ dans la même parabole. L'on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$, $2dx = dy$. Or par la nature de la parabole $yy = px$, $2ydy = pdx$. Substituant dans cette équation la valeur $2dx$ de dy, l'on trouvera $4ydx = pdx$, $4y = p$, $y = \frac{p}{4}$. Substituant cette valeur de y dans l'équation $yy = px$, l'on a $\frac{pp}{16} = px$, $\frac{p}{16} = x$; donc cela arrivera au point correspondant à une abscisse egale à la seiziéme partie du paramètre.

Si l'on demande à quel point de l'hyperbole équilatère la tangente de l'angle de la courbe avec l'ordonnée sera $= 1$, 1 étant le rayon. Dans ce cas $\frac{dx}{dy} = 1$, $dx = dy$. L'équation à l'hyperbole équilatère étant $yy = 2ax + xx$, l'on a $2ydy = 2adx + 2xdx$, ou (parce que par la nature du problême $dx = dy$) $2ydx = 2adx + 2xdx$, ou $y = a + x$. Substituant cette valeur de y dans l'équation de la courbe, l'on a $(a+x)^2 = 2ax + xx$, ou $aa + 2ax + xx = 2ax + xx$, ou $aa = 2ax + xx - 2ax - xx = 0$, ce qui ne peut être; donc l'hyperbole

équilatère ne fait nulle part un angle de 45 degrés avec une ligne parallèle à l'axe des ordonnées.

Si l'on demande à quel point l'angle de la courbe avec une ligne parallèle à l'axe des abſciſſes ſera de 45° dans la courbe dont l'équation eſt $yy = 2ax + 2xx$, l'on aura $\frac{dy}{dx} = 1$, & par la nature de la courbe $2y\,dy = 2a\,dx + 4x\,dx$; donc $\frac{dy}{dx} = \frac{2a+4x}{2y} = 1$, $2y = 2a + 4x$, $4y^2 = (2a + 4x)^2$, ou (en ſubſtituant la valeur de yy) $4(2ax + 2xx) = (2a + 4x)^2$, ou $8ax + 8xx = 4aa + 16ax + 16x^2$; ou tranſpoſant & réduiſant, $8x^2 + 8ax = -4aa$, $xx + ax = -\frac{1}{4}aa$; & en complétant le premier membre, $x^2 + ax + \frac{aa}{4} = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}aa = -\frac{aa}{4}$. Prenant les racines, l'on a $x + \frac{1}{2}a = \pm\frac{1}{2} \times \sqrt{(-aa)}$, quantité imaginaire, qui fait voir que la courbe propoſée ne peut faire nulle part un angle de 45° avec une ligne parallèle aux abſciſſes.

REMARQUE. Si dx étoit ſuppoſé infiniment plus petit que dy, la tangente $\frac{dx}{dy}$ ſeroit infiniment petite, & alors l'ordonnée ſeroit parallèle à la tangente au point cherché & ſe confondroit avec elle, comme cela arrive à l'origine A de la parabole (figure premiere). Si au contraire dy étoit infiniment plus petit que dx, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ ſeroit alors infiniment petite, la tangente de l'angle de la courbe avec une ligne

parallèle à l'axe des x, ou avec l'axe des x ſeroit infiniment petite ; mais cet angle étant infiniment petit, cette tangente ſeroit cenſée ne rencontrer l'axe qu'à une diſtance infinie; la ſous-tangente ſeroit cenſée infinie, & la tangente parallèle à l'axe des abſciſſes : c'eſt ce qui arrive en M extrémité du quart de cercle A M (fig. 4). A cette occaſion, l'on peut remarquer que tandis que dy a quelque grandeur, la tangente rencontre quelque part l'axe P T des abſciſſes, & que la ſous-tangente P T eſt infinie lorſque l'angle T eſt infiniment petit. Mais parce que l'on conçoit que la tangente m T (il en eſt de même de la ſous-tangente) n'a pas diminué, lorſqu'elle eſt entierement devenue parallèle à l'axe, on dit qu'elle eſt alors infinie ; en effet lorſque cette tangente devient ainſi parallèle, dy devient de plus en plus petit, il devient même abſolument $= 0$, & la formule $\frac{dy}{dx}$ devient $= 0$. Ainſi cette expreſſion indique que la tangente eſt parallèle aux abſciſſes ; mais l'expreſſion $\frac{dy}{0}$, indique que la tangente eſt parallèle aux ordonnées. Néanmoins nous ne prétendons pas que l'on puiſſe diviſer quelque choſe par le 0 pur ; ainſi il faut entendre cela dans le ſens que nous venons de l'expliquer (*).

(*) C'eſt ce qu'on pourra concevoir plus facilement, en faiſant attention que les deux ordonnées C M, pN ſont cenſées n'avoir aucune différence, & aboutiſſent toutes les deux à la ligne M D, avec laquelle l'arc M N eſt cenſé ſe confondre. Pour marquer que dy eſt infiniment plus petit que dx, ou réciproquement, nous exprimerons dy par 0 dans le premier cas, & dx par 0 dans le ſecond cas.

Si l'on demande dans quel point de la courbe la tangente eſt parallèle aux abſciſſes, il eſt évident qu'on trouvera ce point en ſuppoſant $dy = 0$ dans la fraction $\frac{dy}{dx}$. Si au contraire l'on demande dans quel endroit la tangente eſt parallèle aux ordonnées, il ſuffira de faire la valeur de la fraction $\frac{dx}{dy} = 0$, ou ce qui revient au même, de ſuppoſer $dx = 0$. Donc ſi l'on ſuppoſe $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}$, l'on aura une tangente parallèle aux ordonnées lorſqu'on aura le numérateur $= 0$, & une tangente parallèle aux abſciſſes, lorſque le dénominateur ſera $= 0$.

37. PROBLÊME. *A quel point de la parabole la tangente eſt parallèle aux ordonnées.* Dans la parabole, l'on a $yy = px$, $2y\,dy = p\,dx$, $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$. Si l'on ſuppoſe le numérateur $2y = 0$, l'on aura $y = 0$; & ſubſtituant cette valeur dans l'équation $yy = px$, l'on a $0 = px$, $x = \frac{0}{p} = 0$. Donc dans la parabole, la tangente eſt parallèle aux ordonnées à l'origine des abſciſſes, ou au point auquel $x = 0$. Mais comme on ne peut pas ſuppoſer le dénominateur $p = 0$, il n'y a aucun point dans la parabole auquel la tangente ſoit parallèle aux abſciſſes.

Dans le cercle, l'on a $yy = 2ax - xx$, $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, $2y\,dy = 2a\,dx - 2x\,dx$,

$y\,dy = (a - x)\,dx$, $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a-x} = \frac{\sqrt{(2ax - xx)}}{a-x}$.

Si l'on ſuppoſe le numérateur $= 0$, l'on a $\sqrt{(2ax - xx)} = 0$; & en élevant au quarré, $2ax - x^2 = 0$, ou en changeant les ſignes, $x^2 - 2ax = -0$, ou en complétant le premier membre, $x^2 - 2ax + aa = 0 + a^2 = a^2$; & en prenant les racines, l'on a $x - a = \pm\sqrt{aa} = \pm a$, $x = a \pm a$, ou $x = 2a$, & $x = 0$. Donc la tangente du cercle eſt parallèle aux ordonnées, aux extrémités du diamètre. Si l'on ſuppoſe le dénominateur $= 0$, l'on a $a - x = 0$, $a = x$; donc la tangente du cercle eſt parallèle aux abſciſſes au point qui répond à l'abſciſſe $x = a$, c'eſt-à-dire, au point qui répond au centre. Venons aux aſymptotes (*).

38. *Une aſymptote* eſt une ligne droite qu'on peut regarder comme la tangente d'une courbe à une diſtance infinie; de ſorte que lorſque la diſtance de l'aſymptote à la courbe eſt plus petite qu'aucune quantité donnée, on peut la regarder comme nulle. Mais cela ne ſuffit point pour qu'une telle ligne ſoit aſymptote, il faut encore qu'on puiſſe déterminer ſa poſition de maniere que la diſtance de cette ligne à l'origine de la courbe ſoit finie. Parmi les aſymptotes, les unes ſont parallèles aux abſciſſes, les autres aux ordonnées. Pour avoir une aſymptote parallèle aux abſciſſes, il eſt néceſſaire 1°. qu'en ſuppoſant x (poſitif ou négatif) infini dans la valeur de $\frac{dx}{dy}$, ou

(*) Il s'agit ici des aſymptotes rectilignes, on a parlé aſſez au long des aſymptotes courbes dans la premiere Partie.

dans la raiſon de $dx : dy$, dy, ſoit $= 0$, ou ſi l'on veut infiniment plus petit que dx. 2°. Que y ſoit fini ou $= 0$. Si $y = 0$, la ligne des x eſt elle-même aſymptote. Si y eſt fini & $= b$, par exemple, la ligne parallèle à l'axe des x & éloignée de cet axe de la quantité b, ſera aſymptote. De même pour avoir une aſymptote parallèle aux ordonnées, il faut que dans la ſuppoſition de $\pm y$ infini, la valeur de $\frac{dx}{dy}$ ſoit $= 0$, ou que dx ſoit ſuppoſé infiniment plus petit que dy, & que x dans cette ſuppoſition ſoit $= 0$, ou fini. Si en ſuppoſant $\pm x$ infini, la valeur de $\frac{dx}{dy}$ eſt finie, on connoîtra l'angle que forme l'aſymptote avec l'axe des x; mais pour que la ligne ainſi déterminée ſoit aſymptote, il faut que la partie de l'axe (prolongé s'il le faut) compriſe entre l'origine des x, & la rencontre de l'axe par cette ligne, ſoit finie. C'eſt pourquoi cherchant la ſous-tangente d'un point infiniment éloigné, & de cette ſous-tangente retranchant l'abſciſſe, ſi ce qui reſte eſt fini ou $= 0$, la ligne menée par ce point ſous l'angle déterminé, ſera l'aſymptote de la courbe.

39. PROBLÈME. *Trouver les aſymptotes de la courbe m n (fig. 20), dont l'équation, en ſuppoſant les abſciſſes* A P $= x$, *les ordonnées* P $n = y$, *eſt* $y x = a x + a b$, ou $y = a + \frac{ab}{x}$. En ſuppoſant $x = \infty$, le terme $\frac{ab}{x}$ diſparoît devant a, & l'on a $y = a$. Mais en différenciant l'équation de la courbe, on trouve $y dx + x dy = a dx$, ou $y dx = a dx$

$-a\,dx = -x\,dy$, $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y-a}$. Si l'on ſuppoſe $dy = 0$, l'on a, ainſi qu'on l'a vu ci-deſſus, une tangente parallèle aux abſciſſes ; mais en faiſant le dénominateur $y - a = 0$, l'on a $y = a$. Donc prenant $AD = a$, & par le point D menant DF parallèle à AB, la ligne DF ſera aſymptote de la courbe. Si l'on ſuppoſe $y = \infty$, dans cette ſuppoſition l'équation $y = a + \frac{ab}{x}$ ne peut avoir lieu qu'en ſuppoſant $x = \frac{1}{\infty}$, & alors le terme a diſparoît devant $\frac{ab}{x}$, qui eſt infiniment grand. Mais ſi dans la formule $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y-a}$, on ſuppoſe le numérateur $= 0$, l'on a $-x = 0$, & $x = 0$. Ainſi nous avons une tangente parallèle aux ordonnées, & qui paſſe par le point correſpondant à $x = 0$; donc ſi par le point A, origine des x, on tire la ligne AC parallèle aux ordonnées, cette ligne ſera encore aſymptôte.

40. PROBLÈME. *Trouver les aſymptotes de l'hyperbole dont l'équation, en ſuppoſant le premier axe* $= a$ *& le paramètre de cet axe* $= p$, *eſt* $y^2 = \frac{p}{a} \times (ax + x.x)$ *ou* $y^2 = \frac{p}{a} xx$, *en ſuppoſant* $x = \infty$ (*). L'on a donc $y = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}\, x$, $dy = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \cdot dx$,

(*) Dans cette ſuppoſition, ax diſparoît par rapport à xx.

$\sqrt{a}.dy = \sqrt{p}.dx$, $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{p}}$. Et parce que l'on ne peut ſuppoſer ni a ni $p = 0$, la courbe n'a aucune aſymptote parallèle aux ordonnées ou aux abſciſſes; mais la ligne qui fait avec l'axe un angle dont la tangente $\frac{dy}{dx}$ eſt $= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}$, eſt cenſée tangente de la courbe à une diſtance infinie. Pour découvrir ſi cette ligne eſt aſymptôte, je cherche la ſous-tangente de l'hyperbole, que l'on trouve (10) $= \frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x}$; d'où retranchant x, il vient $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} - x = \frac{ax + xx - \frac{1}{2}ax - xx}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$ = TA (fig. 21) qui, dans la ſuppoſition de x infini, devient $= \frac{\frac{1}{2}ax}{x} = \frac{1}{2}a$; donc la ligne cherchée paſſe par le point C, milieu de l'axe. Pour déterminer un autre point B de cette ligne CB, je remarque que le triangle CAB étant rectangle, l'on a le coſinus de l'angle C : *ſin.* C :: CA $= \frac{a}{2}$: AB, ou parce que $\frac{\textit{ſin.}\ C}{\textit{cof.}\ C} = \textit{tang.}\ C = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a} : \sqrt{p} :: \frac{1}{2}a : AB = \frac{1}{2}a.\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$. Or en ſuppoſant le ſecond axe $= b$, on auroit le paramètre du premier, en faiſant (Voyez les Sections coniques) $a : b :: b : p$, ou $bb = ap$, $b = \sqrt{ap}$ & $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$; donc en menant par le point A

la ligne AB perpendiculaire au premier axe, & faiſant cette ligne égale à la moitié du ſecond axe, tirant enſuite par les points C & B la ligne CB, cette ligne ſera aſymptote de l'hyperbole.

41. PROBLÈME. *Déterminer les aſymptotes de la courbe dont l'équation eſt* $xy^2 + yx^2 = bx^2 + b^3$. Cherchant la valeur de y en x, je trouve $y^2 + xy = bx + \frac{b^3}{x}$. Complétant le premier membre, j'ai $y^2 + xy + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} + bx + \frac{b^3}{x}$; d'où je tire aiſément, en prenant les racines & tranſpoſant, $y = -\frac{x}{2} + \sqrt{(\frac{xx}{4} + bx + \frac{b^3}{x})}$. Donc dans la ſuppoſition de x infini, les deux valeurs de y ſeront $y = b$, & $y = -x$ (*). Dif-

(*) En prenant la racine de la quantité ſous le ſigne, le premier terme ſera $\frac{x}{2}$. Si l'on diviſe le ſecond terme par le double du premier, ſelon la méthode ordinaire, c'eſt-à-dire ſi l'on diviſe bx par x, l'on a le ſecond terme b de la racine. Multipliant b par x & ajoutant le quarré de b pour le retrancher auſſi bien que bx de la quantité qui eſt ſous le ſigne, il reſte $\frac{b^3}{x} - bb$. Continuant l'opération, on trouve des quatités infiniment plus petites que b; ainſi on peut les négliger. On peut auſſi concevoir cela de cette autre maniere. A cauſe de $x = \infty$, le terme $\frac{b^3}{x}$ diſparoît devant les autres, & ajoutant bb, ce qui eſt permis dans ce cas, car une quantité finie ajoutée à une quantité infinie n'eſt pas cenſée augmenter la racine de celle-ci, l'on aura $\frac{x^2}{4} + bx + bb$, dont la racine eſt $\frac{x}{2} + b$.

férenciant maintenant l'équation proposée & transposant, il vient $2xy\,dy + x^2\,dy = 2bx\,dx - y^2\,dx - 2y\,x\,dx$, ou $dx : dy :: 2xy + xx : 2bx - yy - 2yx$. Supposant x infini, & prenant la premiere valeur de y, on trouve $dx : dy :: xx : -bb :: \infty : -b\,b$, c'est-à-dire, comme une quantité infinie à une quantité finie; donc puisqu'on peut regarder $b\,b$ comme 0 par rapport à xx, l'on peut supposer $dy = 0$; donc on a à l'infini, une tangente parallèle à la ligne des abscisses. C'est pourquoi, si ayant pris AF (fig. 22) pour la ligne des abscisses, & ayant supposé $AB = b$, on fait le quarré ABCD, la droite DCM sera tangente de la courbe à l'infini, & sera une asymptote. Si l'on prend la seconde valeur de y, l'on aura $dx : dy :: 1 : -1$, c'est-à-dire que dy sera $= -dx$; donc ayant supposé $BG = b = AB$, on menera AG (l'on mene BG du côté opposé à cause du signe —), & la tangente d'un point infiniment éloigné sera parallèle à AG. Pour savoir si cette parallele est une asymptote, je cherche la sous-tangente $\frac{y\,dx}{dy}$, qui dans ce cas est $= \frac{2xyy + yxx}{2bx - yy - 2xy}$, d'où retranchant x, il vient $\frac{3xyy + 3yx^2 - 2bx^2}{2bx - y^2 - 2xy}$, qui, dans la supposition de x infini & de $y = -x$, devient $= -2b$; c'est pourquoi prenant $AF = 2b$, si par le point F on mene FR parallèle à AG, l'on aura une asymptote de la courbe. En supposant $x = 0$, l'on trouvera y infini, & la raison de $dx : dy$ pourra être regardée comme plus petite qu'aucune quantité donnée. Donc si par le point A on mene PQ parallèle aux ordonnées, cette ligne sera asymptote de la courbe. Si on suppose $-x$ infini, on trouvera par la même méthode que les lignes MD, RC prolongées du côté de N & de S, sont aussi asymptotes.

42. PROBLÈME. *Déterminer si la courbe dont l'équation est* $a^{m-n}x^n + x^m = y^m$ (n *étant plus petite que* m) *a des asymptotes ou non.* Ayant différencié l'équation de la courbe, l'on trouve $dx : dy :: my^{m-1} : na^{m-n}x^{n-1} + mx^{m-1}$; c'est pourquoi puisqu'en supposant x infini, il vient $y = x$, l'on a en substituant la valeur de y & divisant ensuite les deux termes de la seconde raison par x^{n-1}, l'on a, dis-je, $dx : dy :: mx^{m-n} : na^{m-n} + mx^{m-n}$:

$m x^{m-n}$: (la quantité $n a^{m-n}$ s'évanouiſſant dans cette ſuppoſition) : $m x^{m-n}$; ainſi $dx = dy$ & $x = y$. C'eſt pourquoi en ſuppoſant que A B (fig. 23) eſt la ligne des abſciſſes dont A ſoit l'origine (*), ſi on mene B C parallèle aux ordonnées, & = A B, & qu'on tire A C, cette ligne ſera cenſée toucher la courbe à l'infini. Pour ſavoir ſi cette ligne eſt aſymptote, je cherche la ſous-tangente & j'en retranche x, pour avoir $\frac{m y^m - n a^{m-n} x^n - m x^m}{n a^{m-n} x^{n-1} + m x^{m-1}}$.

Subſtituant la valeur de y^m priſe de l'équation de la courbe, & réduiſant, l'on trouve $\frac{(m-n) a^{m-n} x}{n a^{m-n} + m x^{m-n}}$. Si $m - n < 1$ dans la ſuppoſition de x infini, cette formule a une valeur infinie, & la ligne interceptée entre l'origine des x, & la tangente eſt infinie; donc la courbe n'a point d'aſymptote. Si $m - n = 1$, dans la même ſuppoſition de x infini, la formule devient $= \frac{a}{m}$. C'eſt pourquoi ayant pris A D $= \frac{a}{m}$, & mené D P parallèle à A C, elle ſera aſymptote de la courbe. Si $m - n > 1$, la formule ayant une valeur infiniment petite, ou, ſi l'on veut, étant = o, la ligne A C elle-même ſera aſymptote de la courbe. Si m eſt un nombre pair, à x ſuppoſé infini, répondront deux valeurs égales de y, l'une poſitive, l'autre négative. Il eſt donc évident que de l'autre côté de l'abſciſſe A B, il y aura une autre aſymptote qui fera le même angle avec l'axe des x. Cette derniere aſymptote n'aura pas lieu, ſi m eſt un nombre impair. Si on ſuppoſe $-x$ infini, on prouvera par un raiſonnement ſemblable que les lignes D P, A M prolongées du côté de Q & de N, ſont aſymptotes de la courbe.

(*) Dans cet exemple, on prend les x poſitifs du côté gauche, ce qui eſt très-permis.

Des aſymptotes des courbes dont les ordonnées partent d'un point qu'on appelle foyer.

43. Si dx étant un arc infiniment petit (mn), décrit avec le rayon ou l'ordonnée $y = Cm$ (fig. 24), la raiſon de $dx : dy = Rn$ eſt infinie, ou, ce qui revient au même, ſi la raiſon de $dy : dx$ eſt plus petite qu'aucune quantité donnée, ce qui arrive en i; il eſt évident que la tangente de la coûrbe ſera alors parallèle à la ſous-tangente de la même courbe, ou, ce qui revient au même, ſera perpendiculaire à l'ordonnée correſpondante, & que la courbe eſt touchée dans ce point par un cercle dont le rayon $= y$. C'eſt pourquoi pour trouver les points dans leſquels la ſous-tangente fait un angle droit avec l'ordonnée, il ſuffit de faire $dy = 0$; par cette ſuppoſition, on déterminera la valeur de l'ordonnée y, à laquelle la tangente eſt perpendiculaire. Par exemple, ſi l'équation d'une courbe rapportée au foyer eſt $dx = \frac{b\,dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$; faites $dy = 0$, & vous aurez $dx = \frac{0}{\sqrt{(bb-yy)}} = 0$, ou $dx\sqrt{(bb-yy)} = 0$, ou $\sqrt{(bb-yy)} = 0$, $bb-yy = 0$, $bb = yy$, & $y = b$; donc la tangente eſt perpendiculaire à l'ordonnée au point où cette ordonnée eſt $= b$. Si au contraire on ſuppoſe $dx = 0$, dans ce cas l'ordonnée devient tangente de la courbe, dumoins toutes les fois que cette ordonnée eſt finie; car ſi l'ordonnée eſt infinie, il peut arriver que l'ordonnée elle-même ne ſoit pas tangente de la courbe dans un point infiniment éloigné, mais qu'une ligne parallèle à l'ordonnée ſoit alors l'aſymptote de la courbe. Pour le faire concevoir, ſoit la ſpirale hyperbolique (fig. 25): en ſuppoſant le rayon $CD = r$ & la circonférence du cercle décrit avec ce rayon $= c$, l'équation de cette courbe ſera (voyez le n°. 30) $xy = rc$, ou $z = \frac{rc}{y}$, en écrivant z au lieu de x. Si on faiſoit un arc conſtant $AD = c$, l'équation $z = \frac{rc}{y}$ repréſenteroit encore une ſpirale hyperbolique, dans laquelle AF étant z, CG ſeroit $= y$. Diffé-

ciant l'équation, & faiſant attention que lorſque AF décroît, y croît & réciproquement, l'on aura $dz = \frac{r\,dy}{yy}$; mais en ſuppoſant $Gm = dx$, à cauſe des arcs ſemblables, (c'eſt-à-dire, qui meſurent un méme angle) Ff, Gm, l'on a $dz : dx :: r : GC = y$, ou $dz = \frac{r\,dx}{y}$, ou $dx = \frac{y\,dz}{r} = \frac{c\,dy}{y}$, en ſubſtituant la valeur de dz; donc $dx : dy :: \frac{c\,dy}{y} : dy :: c : y$. En ſuppoſant $y = \infty$, la raiſon $\frac{dx}{dy} = \frac{r}{y}$, eſt plus petite qu'aucune quantité donnée; & alors mG diſparoiſſant devant $dy = mg$, l'angle mgG eſt cenſé $= o$, & les lignes GC & mC ſont cenſées parallèles, c'eſt-à-dire, qu'alors mC devient MC. L'ordonnée y devient infinie, lorſque l'arc AF devient $= o$, c'eſt-à-dire, lorſque l'ordonnée ſe confond avec CM. Cependant CM n'eſt point tangente de la courbe à l'infini, ni aſymptote; car ſi on tire CE perpendiculaire à CM & égale à l'arc $c =$ AD (*), & qu'on mene EN parallèle à CM, la droite EN ſera aſymptote.

Voici la méthode qu'on peut ſuivre pour déterminer ſi une ordonnée infinie eſt aſymptote, ou ſi c'eſt une autre ligne parallèle à cette ordonnée. On cherchera la ſous-tangente de la ſpirale, dont on déterminera la valeur dans la ſuppoſition de y infini. Si la ſous-tangente $= o$, il eſt viſible que l'ordonnée infinie eſt elle-même aſymptote; ſi la ſous-tangente eſt égale à une conſtante c, par exemple, alors l'aſymptote ſera parallèle à l'ordonnée, & en ſera éloignée de la quantité c. Ainſi dans la ſpirale hyperbolique, la ſous-tangente étant $= c$ (30); ſi l'on mene CT $= c$, & perpendiculaire à CG, la droite TG touchera la ſpirale au point G. Si y devient infini, & ſe confond avec CM, la ſous-tangente reſte $= c$ & CE $= c$, & perpendiculaire ſur CM devient ſous-tangente; donc EN devient tangente & aſymptote.

(*) Si c repréſentoit la circonférence, il faudroit prendre CE égale à cette circonférence.

43. Les triangles $g\,m\,G$, GCT rectangles en m & C, & dont les angles $m\,g\,G$ & CGT sont censés égaux à cause des lignes infiniment proches $C\,g$ & CG, sont semblables & donnent $m\,g : m\,G :: CG : CT$, ou $dy : dx :: y : CT = \frac{y\,dx}{dy}$, qui est la sous-tangente de toutes les courbes qui partent d'un point; mais il faut substituer la valeur de dx, ou de $m\,G$ tirée de l'équation de la courbe, afin de faire disparoître les différentielles (voyez le n°. 30). Ici, par exemple, on substitueroit $\frac{y\,dz}{r}$, ou plutôt $\frac{c\,dy}{y}$ à la place de dx, & l'on auroit CT, comme on l'a trouvé (30), où l'on a désigné par dx ce que nous venons de désigner par dz. Les triangles $n\,N\,m$, CLN (fig. 18), ayant leurs côtés perpendiculaires, sont semblables, & donnent $n\,m = dx : N\,m = dy$. $CN = y : CL = \frac{y\,dy}{dx}$, expression de la valeur de la sous-normale CL d'une courbe dont les ordonnées partent d'un point.

De la fraction $\frac{0}{0}$ *& des tangentes qui en dépendent.*

44. 0 n'étant pas une quantité, on ne peut diviser 0 par 0 qu'en considérant 0 comme une quantité infiniment petite du premier, ou du second, ou du troisiéme ordre, &c. Or la fraction $\frac{0}{0}$ peut avoir une valeur finie, parce que les infinis du même ordre peuvent être entr'eux dans le même rapport que les quantités finies. D'ailleurs lorsqu'un ou plusieurs facteurs égaux à 0 affectent le numérateur & le dénominateur d'une fraction, cette fraction devient $= \frac{0}{0}$. Pour déterminer la valeur d'une telle fraction, soit la fraction $\frac{b\,x\,x - 2\,a\,b\,x + a\,a\,b}{c.(x-a)^2} = \frac{0}{0}$, dans le cas

de $x = a$; car alors ſon numérateur devient $= 0$, auſſi bien que ſon dénominateur. Si l'on diviſe le numérateur & le dénominateur par $x - a$, l'on a $\frac{b.(x-a)}{c.(x-a)} = \frac{0}{0}$, à cauſe de $x - a = 0$. Mais en diviſant encore par $x - a$, l'on trouve $\frac{b}{c}$; qui eſt la véritable valeur de la fraction propoſée. De-là on peut conclure *que lorſqu'une fraction devient* $= \frac{0}{0}$, *dans la ſuppoſition de* $x = a$, *on trouvera la valeur de cette fraction, en diviſant le numérateur & le dénominateur par* $x - a$; *ſi alors ni le numérateur ni le dénominateur ne devenoit pas* $= 0$, *la valeur de la fraction ſeroit finie, s'ils deviennent tous les deux* $= 0$, *on diviſera encore par* $x - a$; *ſi dans le ſecond cas aucun des termes de la fraction ne s'évanouit, l'on aura une valeur finie de la fraction; & ainſi de ſuite. Mais ſi l'un des termes s'évanouit & non l'autre, la valeur de la fraction ſera infiniment grande, ſi le dénominateur s'évanouit, ou infiniment petite, ſi c'eſt le numérateur.* Par exemple, la fraction $\frac{(x-a).(x-a)}{b.(x-a)} = \frac{0}{0}$, dans la ſuppoſition de $x = a$, devient (en diviſant tout par $x - a$) $= \frac{x-a}{b} = \frac{0}{b} = 0$. Mais la fraction $\frac{b.(x-a)^2}{c.(x-a)^3} = \frac{0}{0}$, dans la ſuppoſition de $x = a$, devient (en diviſant tout par $x - a$) d'abord $\frac{b.(x-a)}{c.(x-a)^2}$; & en continuant la diviſion, l'on a $\frac{b}{c.(x-a)} = \frac{b}{0} = \infty$,

en considérant $x - a$ comme une quantité infiniment petite, ou regardant x comme $= a + \frac{1}{\infty}$, & $x - a$ comme $a + \frac{1}{\infty} - a = \frac{1}{\infty}$ (*).

Mais cette méthode est ou inutile ou très-compliquée, lorsque la fraction est affectée de plusieurs radicaux; venons donc à un autre méthode, c'est celle de Jean Bernoully. *Selon cette méthode, il faut differencier le numérateur & le dénominateur; si les différentielles ne s'évanouissent pas toutes deux, dans la supposition de* $x = a$, *on divisera l'une par l'autre, & l'on aura la valeur de la fraction; si elles s'évanouissent ensemble, on differenciera de nouveau, en regardant* dx *comme constant, & ainsi de suite jusqu'à ce que les différentielles ne s'évanouissent pas toutes les deux.*

Soit la fraction $\frac{b.(a-x)}{c.(c-x)} = \frac{p}{q}$, en faisant le numérateur $= p$, & le dénominateur $= q$. La valeur de la fraction, dans la supposition de $x = a$, sera $= \frac{dp}{dq} = \frac{-b\,dx}{-c\,dx} = \frac{-b}{-c} = \frac{b}{c}$.

Soit la fraction $\frac{b.(a-x)^2}{(a-x)^2} = \frac{p}{q}$; en différenciant l'on a $\frac{dp}{dq} = \frac{-2b.(a-x).dx}{-2.(a-x).dx}$ $= \frac{0}{0}$ (**), dans la supposition de $x = a$.

(*) Selon ce qu'on a dit dans la premiere partie, une quantité infiniment petite peut être regardée comme n'augmentant ni ne diminuant une quantité finie.

(**) La différentielle de $a - x$ est $= -dx$.

c'eſt pourquoi je différencie de nouveau, en regardant dx comme conſtant, & j'ai $\frac{ddp}{ddq}$ $= \frac{+2b.dx^2}{+2dx^2} = \frac{+2b}{+2} = b.$

Soit la fraction $\frac{p}{q} = \frac{b.(a-x)}{c(aa-2ax+xx)} = \frac{0}{0}$, dans la ſuppoſition de $x = a$. L'on a $\frac{dp}{dq}$ $\frac{-bdx}{-2c.(a-x)dx} = \frac{bdx}{2c.(a-x).dx} = \frac{b}{2c.(a-x)}$ $= \frac{b}{0}$ (à cauſe de $a-x=0$) $= \infty$. Ainſi la valeur de cette fraction eſt infinie. Soit la fraction $\frac{b.(a-x)^2}{c.(a-x)} = \frac{p}{q} = \frac{0}{0}$, dans la ſuppoſition de $x = a$; donc $\frac{dp}{dq} = \frac{-2b.dx.(a-x)}{-c.dx}$ $= \frac{b.(a-x)}{c} = \frac{0}{c}$ (à cauſe de $x = a$); donc $\frac{p}{q} = 0$, ou, ſi l'on veut $= \frac{1}{\infty}$.

On ſe tromperoit cependant, ſi l'on penſoit que cette méthode peut toujours donner la véritable valeur de la fraction $\frac{p}{q}$. En effet, ſoit $\frac{p}{q}$ $= \frac{\sqrt{(2aa-3ax+xx)}}{\sqrt{(a-x)}}$ qui, par la première méthode, en diviſant le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{(a-x)}$, devient $= \sqrt{(2a-x)} = \sqrt{a}$, dans la ſuppoſition de $x = a$. En employant la méthode de Jean Bernoully, l'on aura $\frac{dp}{dq}$

$$= \frac{(-3adx+2xdx)\times 2\sqrt{(a-x)}}{-2dx\sqrt{(2aa-3ax+xx)}}$$

$$= \frac{(3a-2x)\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(2aa-3ax+xx)}} = \frac{0}{0}$$, dans la supposition de $x = a$. Prenant de nouveau les différences, on aura $\frac{ddp}{ddq} = \frac{0}{0}$; prenant encore les différences, l'on trouvera $\frac{dddp}{dddq} = \frac{0}{0}$; & ainsi à l'infini; car les deux radicaux ne disparoîtront jamais. Cela arrivera ainsi, parce que la valeur du numérateur (l'on doit dire la même chose du dénominateur), n'appartient à aucun ordre des quantités dx^0, dx, dx^2, dx^3, &c. mais est moyen entre ces ordres, ainsi qu'il sera aisé de le voir par la méthode que nous allons exposer. Mais par la premiere différenciation, on trouve dx; dx^2 par la seconde; dx^3 par la troisiéme; &c. donc on ne peut par cette méthode obtenir la valeur de la fraction proposée.

La méthode que l'on peut suivre pour avoir la valeur de la fraction $\frac{p}{q} = \frac{0}{0}$, dans la supposition de $x = a$, consiste à mettre dans le numérateur aussi bien que dans le dénominateur, $a \pm dx$ à la place de x, on met $a - dx$, dans le cas que la substitution de $a + dx$ introduiroit des quantités imaginaires; ce qui arriveroit dans la fraction dont nous venons de parler; & la nouvelle fraction qu'on trouvera en s'arrêtant aux différentielles qui ne s'évanouissent pas dans la supposition de $x = a$, sera de cette forme $\frac{R\,dx^m}{u\,dx^n}$. Si $m = n$, la valeur de la fraction sera

finie & $= \frac{R}{u}$. Si $m > n$, elle ſera infiniment petite; mais elle ſera infinie, ſi $m < n$. Si donc on a la fraction $\frac{b.(a-x)^2}{D.(a-x)^2}$, en ſubſtituant $a + dx$ au lieu de x, il vient $\frac{b.(a-a-dx)^2}{D.(a-a-dx)^2}$ $= \frac{b.dx^2}{D.dx^2} = \frac{b}{D}$, comme on le trouveroit par la premiere & la ſeconde méthode. Mais la fraction $\frac{b.(a-x)^3}{A.(a-x)^4}$ devient $= \frac{b.(a-a-dx)^3}{A.(a-a-dx)^4}$ $= -\frac{bdx^3}{Adx^4} = -\frac{b}{A.dx} = -\infty$.

Soit la fraction $\frac{-p}{q} = \frac{\sqrt{(2aa-3ax+xx)}}{\sqrt{(a-x)}}$; en ſubſtituant $a + dx$ au lieu de x, le numérateur deviendroit imaginaire, ainſi que le dénominateur; c'eſt pourquoi mettant $a - dx$ au lieu de x & réduiſant, j'ai $\frac{dp}{dq} = \frac{\sqrt{(adx+dx^2)}}{\sqrt{dx}}$ $= \frac{\sqrt{dx}.\sqrt{(a+dx)}}{\sqrt{dx}}$; or $(a+dx)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ $+ \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{8} \times a^{-\frac{3}{2}}.dx^2$ &c. $= a^{\frac{1}{2}}$, parce que les termes ſuivans diſparoiſſent devant le premier; donc la fraction propoſée eſt $= \frac{(dx)^{\frac{1}{2}}\sqrt{a}}{(dx)^{\frac{1}{2}}}$ $= \sqrt{a}$, comme on l'a trouvé par la premiere méthode.

REMARQUE. En prenant les racines, on doit avoir attention de choiſir pour premier terme

une quantité qui ne contienne pas dx, pour ſecond terme celui qui contient la premiere puiſſance de dx, pour troiſiéme terme les quantités affectées de dx^2, & ainſi de ſuite; & l'on doit pouſſer l'aproximation juſqu'à ce que les quantités hors du ſigne ne détruiſent plus les termes que l'on trouve par cette approximation. Cependant il peut arriver que le ſecond terme contienne dx^2, le troiſiéme dx^4, comme cela arriveroit, ſi l'on avoit $\sqrt{(a+dx^2)}$.

L'on peut abréger le calcul, en ſuppoſant $a-x=t$, ce qui donne $x=a+t$, & ſubſtituant dans l'équation, $a+t$ au lieu de x & dt à la place de dx. Soit, par exemple, la fraction $\frac{2a^3+2a^2t-att+t^3-2aa\sqrt{(aa+2at)}}{-2aa+tt+2a\sqrt{(aa-tt)}}$, qui réſulte d'une autre fraction par la ſubſtitution de t à la place de $x-a$. Comme $t=x-a$ eſt $=0$, dans la ſuppoſition de $x=a$, pour trouver la valeur de la fraction propoſée, qui devient $=\frac{0}{0}$, dans la ſuppoſition de $t=0$, je ſubſtitue dt à la place de t & je trouve $\frac{2a^3+2aadt-adt^2+dt^3-2aa\sqrt{(aa+2adt)}}{-2aa+dt^2+2a\sqrt{(aa-dt^2)}}$; convertiſſant les radicaux en ſeries, & les continuant juſqu'au premier terme, qui n'eſt pas détruit, par les quantités rationnelles, l'on a $\sqrt{(aa+2adt)}=a+dt-\frac{dt^2}{2}+\frac{dt^3}{2a}-\frac{5dt^4}{8a^3}$. L'on a auſſi $\sqrt{(aa-dt^2)}$

$= a - \frac{dt^2}{2a} - \frac{dt^4}{8a^3}$ (*). Substituant ces valeurs, & réduisant, l'on a la fraction $\frac{5.4.aadt^4}{-4adt^4} = -5a$.

Soit la fraction $\frac{b.(a-x)^2}{(a-x)^2}$, que nous avons trouvée ci-dessus $= b$, dans le cas de $a = x$. Si on met t à la place de $a - x$, l'on a $\frac{bt^2}{t^2}$. Substituant dt à la place de t, l'on a $\frac{bdt^2}{dt^2} = b$, comme ci-dessus.

Soit la fraction $\frac{caa - 2acx + cx^2}{baa - 2abx + bxx} = \frac{0}{0}$, dans la supposition de $x = a$. Substituant $a + dx$ à la place de x, l'on a, toute réduction faite, $\frac{cdx^2}{bdx^2} = \frac{c}{b}$. Telle est la valeur de la fraction proposée.

REMARQUE I. Lorsqu'on est parvenu à un ordre de différentielles (soit dans le numérateur, soit dans le dénominateur), qui ne s'évanouissent pas par la contrariété des signes, il n'est pas nécessaire d'aller plus loin; parce qu'en opérant, comme dans les exemples précédens, on trouveroit

(*) Le terme $-\frac{dt^2}{2a}$ étant multiplié par $2a$ multiplicateur du radical, est $= -dt^2$, qui est détruit par dt^2.

des quantités infiniment plus petites que celles que l'on a déja trouvées.

REMARQUE II. La méthode de Bernoully étant fort aiſée, on pourra l'employer dans le cas où elle peut réuſſir.

Soit la fraction $\frac{p}{q} = \frac{L.x}{\sqrt{(1-x)}}$ (*), (L déſigne le logarithme hyperbolique.), dont on demande la valeur, dans la ſuppoſition de $x = 1$. La différence du numérateur eſt $= \frac{dx}{x}$, celle du dénominateur étant $\frac{1}{2}\, dx\,(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{dx}{2.\sqrt{(1-x)}}$; donc $\frac{dp}{dq} = \frac{2.\sqrt{(1-x)}}{x} = 0$, dans la ſuppoſition de $x = 1$; ainſi la valeur de la fraction propoſée eſt $= 0$.

Soit la fraction $\frac{x - x^{n+1}}{1-x} = \frac{0}{0}$ dans la ſuppoſition de $x = 1$. Différenciant à l'ordinaire, il vient $\frac{dx - (n+1)x^n dx}{-dx} = \frac{1-(n+1)x^n}{-1}$ $= n$, en ſuppoſant $x = 1$; donc la valeur de cette fraction eſt $= n$. Si $n = 10$, la valeur de cette fraction ſera 10.

Soit la fraction $\frac{1 - \mathit{ſin.}\, x + \mathit{coſ.}\, x}{-1 + \mathit{ſin.}\, x + \mathit{coſ.}\, x} = \frac{0}{0}$,

(*) Cette fraction devient $= \frac{0}{0}$, lorſque $x = 1$; car $L.1 = 0$.

en ſuppoſant que x eſt un arc de 90°, & que le rayon $= 1$. Prenant les différences & diviſant par dx, l'on a $\frac{-cof.\ x - ſin.\ x}{cof.\ x - ſin.\ x} = \frac{-ſin.\ x}{-ſin.\ x} = \frac{-1}{-1} = 1$, à cauſe de $cof.\ x = 0$, & de $ſin.\ x = 1$.

Parlons maintenant des tangentes qui dépendent de la fraction $\frac{0}{0}$. Soit (fig. 26) la courbe $m\,L\,n$, dont l'équation eſt $y = b \pm (x - a).\ \frac{\sqrt{x}}{a}$, en faiſant A P $= x$, P $m = y$; il eſt viſible qu'à chaque abſciſſe il répondra deux ordonnées, mais au point i, d'interſection de deux branches $m\,s$, $n\,g$, il ne répond qu'une ſeule ordonnée $p\,i$, qui cependant eſt cenſée double, & le point i eſt un point double auquel répond une double tangente $i\,t$, $i\,T$, dont l'une appartient à une des branches de la courbe, & l'autre à l'autre branche; de plus la valeur de l'ordonnée correſpondante au point i ſera $= b$; puiſqu'à ce point A $p = x$ eſt $= a = L\,i$.

En différenciant l'équation de la courbe, l'on a $dy = \pm dx\sqrt{\frac{x}{a}} \pm dx(x-a)^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $= \pm dx\sqrt{\frac{x}{a}}$, dans la ſuppoſition de $x = a$; donc $dy^2 = dx^2.\ \frac{x}{a} = dx^2$ (à cauſe de $x = a$), $\frac{dy^2}{dx^2} = 1$, $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$; donc au point i, il répond deux tangentes qui ſe croiſent, & font un angle de 45° avec la ligne $L\,i$ parallèle

à AP, l'une dans un ſens, l'autre dans l'autre ſens. Pour trouver ces ſortes de tangentes, il faut différencier l'équation, & ſuppoſant que l'abſciſſe correſpondante au point d'interſection eſt = A, & que l'ordonnée eſt = B, on ſubſtituera $A+dx$ à la place de x, $B+dy$ à la place de y; tranſpoſant tous les termes d'un côté, & prenant pour premier terme toutes les quantités finies, on prendra pour ſecond terme toutes les quantités affectées de dx, ou de dy linéaires; pour troiſiéme terme toutes les quantités qui renferment dx^2, $dx\,dy$, dy^2 dont la ſomme des expoſans eſt = 2; pour quatriéme terme toutes les quantités dans leſquelles la ſomme des expoſans de ces différentielles eſt = 3; &c. Le premier terme ſera toujours = 0; on s'arrêtera au ſecond, s'il n'eſt pas = 0, & alors il n'y a point d'interſection; s'il eſt = 0, on ira au troiſiéme, & il y aura un point d'interſection. Si le troiſiéme s'évanouit par la contrariété des ſignes, le quatriéme indiquera la poſition des tangentes, & ainſi de ſuite. Au lieu d'écrire $A+dx$ à la place de x, & $B+dy$ à la place de y, on peut, ſi l'on veut, écrire $x+dx$ & $y+dy$, cela revient au même; on peut auſſi, ſi l'on veut ſe diſpenſer d'extraire des racines, faire diſparoître les radicaux de l'équation avant de différencier.

Soit la ligne du quatriéme ordre dont l'équation eſt $y^4 - 8ay^3 - 12axy^2 + 16a^2y^2 + 48a^2xy + 4a^2x^2 - 64a^3x = 0$. Si dans cette équation on ſuppoſe $x = 2a$, on trouvera $y = 2a$, & l'on a une interſection de deux branches correſpondantes à ces co-ordonnées égales. Ecrivant donc $2a+dx$ à la place de x, $2a+dy$ à la place de y, ou ſi l'on veut, écrivant $x+dx$ au lieu de x, & $y+dy$ au lieu de y, diſpoſant les

quantités de la même dimenſion, les unes ſous les autres, l'on aura

$$\left.\begin{array}{llll} y^4 & +4y^3dy & +6y^2dy^2 & +4ydy^3+dy^4 \\ -8ay^3 & -24ay^2dy & -24ayd^2y & -8ady^3 \\ -12axy^2 & -24axydy & -12axdy^2 & -12adxdy^2 \\ +16a^2y^2 & -12ayydx & -24aydydx & \\ +48a^2xy & +32a^2ydy & +16a^2dy^2 & \\ +4a^2x^2 & +48a^2xdy & +48aadxdy & \\ -64a^3x & +48a^2ydx & +4aadx^2 & \\ & +8a^2xdx & & \\ & -64a^3dx & & \end{array}\right\} = 0$$

Pour trouver le rapport entre dx & dy d'où dépend la tangente, je remarque que la premiere colonne, que je regarde comme un ſeul terme, s'évanouit, en ſuppoſant $x = 2a$ & $y = 2a$; ſi la ſeconde colonne ne s'évanouiſſoit pas, elle ſuffiroit pour faire trouver la tangente. Mais en ſuppoſant $x = 2a$ & $y = 2a$, dx & dy ſont multipliés, chacun par 0. C'eſt pourquoi je paſſe à la troiſiême colonne, qui ne s'évanouit pas comme la premiere, & négligeant les autres colonnes comme s'évanouiſſant devant la troiſiéme, je trouve en ſubſtituant $2a$ à la place de x & de y, & faiſant le calcul, je trouve, dis-je, $dx^2 = 8dy^2$, ou $\frac{dx^2}{dy^2} = 8 = \frac{8}{1}$, & $\frac{dx}{dy} = \pm\frac{\sqrt{8}}{1} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{1}$. Donc au point de la courbe correſpondant à l'abſciſſe $x = 2a$, il y a deux tangentes qui font avec l'ordonnée l'une l'angle dont la tangente eſt exprimée par $\frac{2\sqrt{2}}{1}$, l'autre faiſant l'angle dont la tangente eſt $= -\frac{2\sqrt{2}}{1}$;

REMARQUE I. Cette méthode peut réuſſir, lors même qu'il y a des radicaux, pourvu qu'en extrayant les racines avec la précaution que les quantités finies conſtituent, le premier terme, les infiniment petites, ſelon leur rang, conſtituant le ſecond, troiſiéme, &c. ainſi qu'on l'a dit ci-deſſus.

REMARQUE II. Si on différencie à l'ordinaire la premiere colonne du dernier exemple, on aura la ſeconde; & en différenciant la ſeconde, en regardant dx & dy comme conſtans, & diviſant par 2, on a la troiſiéme colonne; différenciant de même la troiſiéme, & diviſant par 3, on a la quatriéme.

C'eſt pourquoi le rapport cherché de $dx : dy$ peut ſe trouver, en différenciant ſelon la méthode ordinaire. Pour cela on différenciera l'équation de la courbe par la méthode vulgaire. Cette premiere différenciation donnera le rapport de $dx : dy$; mais ſi tous les termes diſparoiſſent par une certaine ſuppoſition de $x = a$ & de $y = b$, on différenciera de nouveau, en regardant dx & dy comme conſtans: l'équation qui en réſultera fera connoître le rapport cherché. Cette équation différera de celle qu'on trouveroit par la méthode ci-deſſus, en ce qu'elle aura tous les termes multipliés par 2. Mais un multiplicateur qui affecte tous les termes d'une équation, ne trouble pas l'égalité. Si la ſeconde équation s'évanouit, on continuera de même juſqu'à ce qu'on parvienne à une équation dont les termes ne ſe détruiſent pas par la contrariété des ſignes. Si l'équation eſt compliquée de radicaux, on pourra le faire diſparoître avant de différencier.

Soit ſuppoſée l'équation de la courbe $a(y-b)^2$

$-x(x-a)^2=0$, cette courbe (fig. 26) eſt la même que celle dont on a parlé ci-deſſus. En différenciant à l'ordinaire, je trouve $2ady(y-b)-dx.(x-a)^2-2x.dx.(x-a)=0$. Si on ſuppoſe $y=b$ & $x=a$, le multiplicateur de dx & celui de dy deviennent chacun $=0$. C'eſt pourquoi l'on a dans ce cas $\frac{dx}{dy}=\frac{0}{0}$. Je différencie donc de nouveau, en traitant dx & dy comme conſtans, ce qui me donne $2ady^2-2dx^2(x-a)-2dx^2(x-a)-2xdx^2=0$, équation qui, en ſuppoſant $x=a$, devient $2ady^2-2adx^2=0$; donc $\frac{dx^2}{dy^2}=1$, & $\frac{dx}{dy}=\pm 1$, comme on l'a trouvé ci-deſſus.

Pour avoir la poſition de la tangente de la courbe B M C *m b n* C D (dont l'origine des abſciſſes eſt au centre C d'un cercle dont le rayon CB $=a$) (fig. 27) déſignée par l'équation $(y^2+x^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ & qu'on appelle *lemniſcate*, au point auquel $x=0$ & $y=0$; en ſubſtituant $x+dx$ au lieu de x, & $y+dy$ au lieu de y, ou, ſi l'on veut, en ſubſtituant $0+dx=dx$ & $0+dy=dy$, au lieu de x & de y, on trouvera, dis-je, $(dy^2+dx^2)^2=a^2dx^2-a^2dy^2$, ou en ôtant l'expoſant 2 & tranſpoſant, $dy^4+2dy^2\times dx^2+dx^4+a^2dy^2-a^2dx^2=0$; ainſi $a^2dy^2-a^2dx^2=0$ (parce que les autres termes diſparoiſſent devant ces deux-là), ou $a^2dy^2=a^2dx^2$, $\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{aa}{aa}=1$, $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{1}=\pm 1$. Donc au point C répondent deux tangentes qui font un angle de 45° avec la ligne des abſciſſes.

REMARQUE I. On peut employer différentes méthodes, ainſi qu'on vient de le voir, pour trouver les tangentes. Dans chaque cas il eſt bon d'employer celle qui eſt moins embarraſſante; & ſi l'on trouve quelque difficulté en employant l'une, on fera uſage de l'autre.

Si l'on arrivoit à une équation de cette forme, $\frac{dx^3}{dy^3} - \frac{a^2 dx}{b^2 dy} = 0$, l'on auroit $\frac{dx}{dy} = 0$, $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{a^2}{b^2}$, & $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{a}{b}$; de ſorte qu'il y auroit trois tangentes au point correſpondant de la courbe; l'une ſeroit parallèle aux ordonnées, & les deux autres ſeroient avec l'ordonnée un angle dont la tangente eſt $= \frac{a}{b}$, l'une d'un côté, l'autre de l'autre.

45. REMARQUE II. On peut quelquefois avoir la tangente d'une courbe d'une maniere fort élégante par quelque propriété donnée de cette courbe. Pour en donner un exemple, ſoit la courbe LM (fig. 28) qu'on appelle *épicicloïde* (& dont nous avons donné l'équation dans les courb. alg. 70, en ſuppoſant que le cercle mobile eſt égal à l'immobile), cette courbe eſt décrite par le mouvement d'un point M, ſitué ſur la circonférence du cercle mobile RMP, qui circule ſur la circonférence du cercle LRB; de maniere que l'arc LR eſt égal à l'arc MR, ſoit que le diamètre du cercle mobile ait avec le diamètre de l'immobile une raiſon d'égalité ou d'inégalité. Pour mener la tangente au point M de la courbe, je remarque que le point décrivant M eſt l'extrémité de la corde MR qui fait un angle droit avec la corde MP, parce que

l'angle PMR eſt appuyé ſur le diamêtre RP; de plus le point décrivant M peut être regardé comme l'extrémité d'un compas qui décrit un arc circulaire infiniment petit M*i*, auquel la ligne MR eſt toujours perpendiculaire. Donc la corde MR eſt perpendiculaire à l'arc M*i*, qui eſt un petit arc de l'épicicloïde; & partant MR eſt normale de l'épicicloïde; or la normale eſt perpendiculaire à la tangente de la courbe; ainſi PM eſt tangente de la courbe. Donc pour mener une tangente au point M de l'épicicloïde, par le point M on décrira le cercle générateur, par le centre C du cercle immobile, & le point R' où le cercle générateur touche le cercle LRB, on tirera la ligne CRP; & joignant les points M & R, M & P par les lignes MR, PM, la premiere ſera normale, & la ſeconde tangente de l'épicicloïde. Il eſt donc facile d'avoir la tangente PMT d'une telle courbe; ce qui ſeroit bien difficile dans tous les cas par une autre méthode. Pour décrire par le point M le cercle générateur PDM, je remarque que ſi du point C comme centre avec le rayon C*b* = CR + R*b* ſomme des rayons du cercle mobile & du cercle immobile, on décrit la circonférence *baf*, le centre *b* du cercle mobile ſera toujours dans la circonférence de ce cercle; donc ſi du point M avec le rayon *b*R on décrit un arc *bt* du côté oppoſé au point L, cet arc rencontrera la circonférence *baf* en un point *b*, par lequel avec le rayon R*b*, on décrira le cercle générateur qui touchera le cercle immobile en R, & rencontrera l'épicicloïde en M.

De la méthode des maximis & minimis.

46. Selon ce que nous avons dit ci-dessus (36), lorsque dy est supposé $= 0$, la tangente désignée par $\frac{dy}{dx}$ est parallèle aux abscisses. Si dans une courbe A N *a* (fig. 29) les ordonnées vont en croissant jusqu'à un certain point, puis en décroissant, la tangente au point M situé entre A & N rencontrera l'axe du côté de A.

Mais la tangente *m t* au point *m* situé entre N & *a*, rencontrera l'axe du côté opposé; donc la tangente au point N ne rencontrera l'axe d'aucun côté, & sera parallèle aux abscisses. Or il est visible que cela arrivera au point N, point auquel les ordonnées P M cessent de croître pour décroître aussi-tôt; c'est-à-dire au point où l'ordonnée C N est plus grande que les ordonnées voisines P M, *p m* prises l'une à droite & l'autre à gauche: l'ordonnée C N s'appelle alors un *maximum*. Si la courbe M N *m* (fig. 30) est convexe du côté de l'axe P C, il peut arriver que les ordonnées allant d'abord en décroissant jusqu'en N, croissent ensuite de maniere que C N soit plus petite que les ordonnées voisines: dans ce cas on l'appelle un *minimum*; & alors la tangente N *n* est évidemment parallèle aux abscisses. Ainsi lorsque la tangente est parallèle aux abscisses, on peut avoir un *maximum*, ou un *minimum*. Cela peut arriver aussi lorsque la tangente est parallèle aux ordonnées (fig. 31); car la ligne C N se confond avec la tangente au point N, ou pour mieux dire, cette ligne est tangente des deux branches M N, *m* N, & l'arc infiniment petit N *i* est censé être une ligne droite qu'on peut regarder comme faisant un angle infiniment petit avec l'ordonnée L *i*. Dans le triangle rectangle *i* N *s*, en faisant le rayon $= 1$,

l'on a $si = dy : sN = LC = dx :: 1 : tang.\ si\ N = \frac{dx}{dy}$. Or cet angle étant infiniment petit, la raiſon de $dx : dy$ doit être infiniment petite, c'eſt-à-dire, que dy eſt alors infiniment plus grand que dx. Cela a également lieu dans la figure 32, mais avec cette différence que C N eſt un *minimum* dans la fig. 31, & un *maximum* dans la fig. 32. Donc on peut avoir un *maximum* ou un *minimum*, lorſque le rapport de $dy : dx$ eſt tel que dy peut être regardé, reſpectivement à dx comme une quantité infiniment grande.

Cependant toutes les fois que dy eſt $= 0$, on ne doit pas conclure qu'on a un *maximum* ou un *minimum*; car cela indique ſeulement que la tangente eſt parallèle à la ligne des x; mais la tangente Nn (fig. 33) peut être parallèle à la ligne des x, ſans que les ordonnées voiſines du point N ſoient à la fois plus grandes ou plus petites que l'ordonnée C N. Cela peut arriver lorſque la courbe A N de concave devient convexe ou réciproquement; mais alors la ligne Nn peut être parallèle à A P, & de plus être tangente de la partie concave A N, & de la partie convexe Nm. Dans la fig. 34, la ligne Nn eſt tangente des deux branches mN, MN & CN n'a aucune ordonnée voiſine du côté de la droite; ainſi cette ordonnée ne peut être ni un *maximum*, ni un *minimum*, dans le ſens que nous l'entendons ici. De même l'ordonnée Nc (fig. 33) $= y$ (en faiſant A$c = x$ & cN $= y$) peut être parallèle aux ordonnées, ſans cependant être un *maximum*, ou un *minimum*. Cela peut arriver au *point d'inflexion* (*).

(*) Un point d'inflexion N (fig. 33 & 35) eſt celui auquel une courbe de concave vers ſon axe devient convexe ou réciproquement.

Pour connoître le *maximum* ou le *minimum*, on ſuppoſera d'abord $dy = 0$, & de-là on tirera la valeur de l'abſciſſe correſpondante au *maximum* ou au *minimum*. Si la ſuppoſition de $dy = 0$ ne fait rien connoître, on fera $dx = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = \infty$, ou ce qui revient au même, on ſuppoſera $dy = \infty$; parce qu'en ſuppoſant $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{B} = \infty$, le réſultat ſera le même que ſi on ſuppoſoit $B = 0$. Pour ſavoir enſuite ſi l'on a un *maximum*, ou un *minimum*, on augmentera d'abord, & enſuite on diminuera x d'une quantité infiniment petite dx. Si dans ces deux cas la valeur de y eſt plus petite que celle qu'on a trouvée, l'on a un *maximum*, ſi elle eſt plus grande, on a un *minimum*. Mais on n'aura ni un *maximum* ni un *minimum*, ſi dans un cas elle eſt plus grande, & dans l'autre plus petite que la valeur de y qu'on a d'abord trouvée. Avant de faire l'application de ce que nous venons de dire, nous ferons remarquer qu'une courbe (fig. 36) peut avoir pluſieurs *maxima* & pluſieurs *minima* CN; cela eſt évident par l'inſpection de la figure.

47. PROBLÊME. *On demande la plus grande ordonnée d'une demi-ellipſe ANa* (*fig.* 29). L'équation de l'ellipſe en ſuppoſant le grand axe $= 2a$ & le petit axe $= 2b$, eſt $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$ donc $2ydy = \frac{bb}{aa}(2adx - 2xdx)$. Suppoſant $dy = 0$, l'on a $2ydy = 2y \times 0 = 0 = \frac{bb}{a} \times (2adx - 2xdx)$, ou $2adx = 2xdx$, $2a = 2x$,

& $a = x$; c'eſt-à-dire, que la plus grande ordonnée répond à l'abſciſſe AC égale au demi-grand axe, ou, ce qui revient au même, la plus grande ordonnée de l'ellipſe répond au centre.

Si dans l'équation $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$ on ſuppoſe $b = a$, l'on aura $yy = 2ax - xx$: cette équation appartient au cercle, qui eſt une ellipſe dont les axes ſont égaux; donc dans le cercle la plus grande ordonnée paſſe par le centre.

48. PROBLÊME. *Trouver la plus grande ordonnée de la courbe ANa (fig. 37), dont les ordonnées* $CN = z$ *ſont moyennes proportionnelles entre les ordonnées* $Cm = y$, *& les abſciſſes* $AC = x$ *du demi-cercle Ama.* Soit le diamètre du cercle $= 2a$, l'équation du cercle ſera $yy = 2ax - xx$; mais l'équation de la courbe ſera $zz = yx$. En différenciant l'équation du cercle, l'on a $2y\,dy = 2a\,dx - 2x\,dx$, $dy = \frac{a\,dx - x\,dx}{y}$. L'équation de la courbe donne $2z\,dz = y\,dx + x\,dy = y\,dx + \frac{ax\,dx - xx\,dx}{y}$ (en ſubſtituant la valeur de dy) $= \frac{y^2\,dx + ax\,dx - xx\,dx}{y}$. Mais au point du *maximum*, l'on a $dz = 0$, & $2z\,dz = 0$; donc $\frac{y^2\,dx + ax\,dx - xx\,dx}{y} = 0$, $y^2\,dx + ax\,dx - xx\,dx = 0$, $y^2 + ax - xx = 0$. Et en ſubſtituant la valeur de y^2 priſe de l'équation du cercle, il vient $2ax - x^2 + ax - x^2 = 0$, $3ax - 2xx = 0$, $3a - 2x = 0$, $3a = 2x$, & $x = \frac{3a}{2}$. Prenant donc $AC = \frac{3a}{2}$, le

point C sera celui auquel répond la plus grande ordonnée.

49. PROBLÊME. *Trouver la plus grande ordonnée d'une ellipse d'un genre supérieur.* L'équation des ellipses des genres supérieurs, en supposant l'axe $= a$, est $\frac{a}{p} y^{m+n} = x^m (a-x)^n$. Donc en différenciant, $(m+n) \frac{a}{p} y^{m+n-1} dy = m x^{m-1} (a-x)^n dx - n x^m dx (a-x)^{n-1} = 0$ (en faisant $dy = 0$, ce qui rend le premier membre de l'équation & par conséquent aussi le second $= 0$); donc divisant par dx & transposant, $m x^{m-1} \times (a-x)^n = n x^m (a-x)^{n-1}$, divisant par $x^{m-1} \times (a-x)^{n-1}$, il vient $m (a-x) = n x$, ou $ma - mx = nx$, $ma = mx + nx$, $x = \frac{ma}{m+n}$.

L'équation des cercles des genres supérieurs ne différant de l'équation des ellipses des genres supérieurs qu'en ce que dans les cercles a est $= p$, ce qui n'arrive pas dans les ellipses, en suivant le même procédé, on trouvera de même que l'ordonnée correspondant à l'abscisse $x = \frac{ma}{m+n}$ est un *maximum* dans ces sortes de courbes.

Si $m = 5$ & $n = 3$, on aura $x = \frac{5a}{8}$. Si $m = 6$ & $n = 1$, l'on aura $x = \frac{6a}{7}$; & ainsi de suite, soit qu'il s'agisse d'une ellipse ou d'un cercle des genres supérieurs.

50. PROBLÊME. *Trouver la plus grande ordonnée de la courbe AMB (fig. 38), dont la nature est*

que le diamètre A b ſoit toujours égal à l'axe A B, auſſi bien qu'à la ligne droite m M menée par le point A à chaque point M & m de la courbe & du demi-cercle A m b. Soit $AM = z$, $PM = y$, $Ab = a$; donc $mA = a - z$. Parce que bA eſt perpendiculaire à AB, & qu'il en eſt de même de PM, les lignes bA, PM ſont parallèles, & les angles AMP, mAC correſpondans ſont égaux; & parce que de plus les angles P & bmA (*) ſont droits, les triangles bmA, PMA ſont évidemment ſemblables, & partant $PM : AM :: Am : Ab$, ou $y : z :: a - z : a$, $ay = az - zz$, $ady = adz - 2zdz = 0$, en faiſant $dy = 0$; ainſi $a - 2z = 0$, & $z = \frac{a}{2}$. Mais l'équation $ay = az - zz$, donne (en ſubſtituant la valeur de z) $ay = \frac{aa}{2} - \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4}$, & $y = \frac{a}{4}$; donc dans le cas du *maximum*, l'on a $(AM)^2 = \frac{aa}{4} = (PM)^2 + (PA)^2$, ou $(PA)^2 = \frac{aa}{4} - \frac{aa}{16} = \frac{4aa}{16} - \frac{aa}{16} = \frac{3aa}{16}$, & $PA = \sqrt{\frac{3aa}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$.

51. PROBLÈME. *Trouver la plus petite ordonnée de la courbe MNm (fig. 31), dont l'équation eſt* $y - a = \sqrt[3]{a}.(a^2 - 2ax + xx)^{\frac{1}{3}}$. Donc $dy = \frac{1}{3}\sqrt[3]{a}.(-2adx + 2xdx).(aa - 2ax + xx)^{-\frac{2}{3}}$, ou (A) $dy = \sqrt[3]{a} \times \frac{(-2adx + 2xdx)}{3(aa - 2ax + xx)^{\frac{2}{3}}}$. Si on ſuppoſe $dy = 0$, le

(*) Ce dernier angle eſt appuyé ſur le diamètre.

numérateur de la fraction devient $\sqrt[3]{a.(-2adx+2xdx)}=0$, d'où l'on tire $-2a+2x=0$, $2x=2a$, $x=a=AC$. Si on suppose dy infiniment plus grand que dx, l'on aura $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt[3]{a.(-2a+2x)}}{3(aa-2ax+xx)^{\frac{2}{3}}}$, & supposant le dénominateur de l'une & l'autre fraction $=0$, l'on aura $dx=0$, & $aa-2ax+xx=0$; & en prenant la racine, il vient $a-x=0$, & $x=a$. Lorsque cela arrive ainsi, c'est une marque que le point correspondant N appartient à plusieurs branches de la même courbe; & que le multiplicateur de dy, aussi bien que celui de dx, est $=0$. En effet, si dans ce cas on fait disparoître la fraction de l'équation A ci-dessus, on aura l'équation $dy\times 3(aa-2ax+xx)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a.(-2a+2x.)}\,dx$, qui, dans la supposition de $x=a$, devient $dy\times 0=0\times dx$, ou $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$. & l'ordonnée CN est la tangente des deux branches NM, Nm, ou, si l'on veut, les deux tangentes de ces branches, se confondent au point N, ne formant plus qu'une seule ligne NC.

52. PROBLÈME. *Trouver la plus grande ordonnée d'une demi-cicloïde racourcie AMB* (*fig.* 39). Supposant la demi-circonférence du cercle générateur $=C$, la base de cette cicloïde $=D$, l'arc de cercle $An=x$, l'équation de la courbe rapportée au diamètre Ag du cercle générateur, sera (selon ce qu'on a dit dans la première partie de cet Ouvrage courbes transcendentes n°. 10) $pm=y=sin.\,x+\frac{Dx}{C}$; donc $dy=d.(sin.\,x)+\frac{D\,dx}{C}$. Pour avoir la différentielle de $sin.\,x=pn$, je tire ns perpendiculaire à fi, je fais $Ap=z$, & j'ai $bp=a-z$, & $si=d(pn)$ (en supposant les ordonnées fi, pn infiniment proches); ainsi $ni=dx$. Or les triangles bnp, nis ayant leurs côtés perpendiculaires, sont semblables; donc $bn:bp::ni:si$, ou $a:a-z::dx:si=d.(pn)=\frac{a\,dx-z\,dx}{a}$. Donc en substituant cette valeur de $d.(sin.\,x)$, $dy=\frac{a\,dx-z\,dx}{a}+\frac{D\,dx}{C}=\frac{aC\,dx-Cz\,dx+aD\,x}{aC}=0$ (en supposant $dy=0$);

donc $a\,C - C\zeta + a\,D = 0$, $a\,C + a\,D = C\zeta$, & $\zeta = \frac{a\,C + a\,D}{C} = a + \frac{a\,D}{C}$. C'eſt pourquoi l'on aura l'abſciſſe A P correſpondante à la plus grande ordonnée P M, en ajoutant, au rayon A b une ligne b P troiſiéme proportionnelle à la demi-circonférence du cercle générateur, au rayon a du même cercle & à la baſe D de la cicloïde racourcie.

53. PROBLÈME. *Trouver la plus petite ordonnée d'une courbe exponentielle dont l'équation eſt* $y = x^x$ (*fig.* 17). De l'équation à la courbe, on tire $L.y = x\,L.x$, $\frac{dy}{y} = dx.\,L.x + x.\left(\frac{dx}{x}\right)$, $dy = y\,(dx\,L.x + dx) = 0$, en ſuppoſant $dy = 0$; donc $y\,dx = -y.\,dx.\,L.x$, ou $1 = -L.x$. Prenant donc ſur l'axe R A de la logarithmique l'abſciſſe négative A q = A B = 1, il viendra $b\,q = x$, A $q = 1 = -L.x$. C'eſt pourquoi par le point b, menant $b\,a$, l'ordonnée correſpondante au point a ſera la plus petite ordonnée cherchée. Voyez ce que nous avons dit ci-deſſus (29) ſur la nature de cette courbe.

Si l'on ne connoiſſoit point aſſez la figure de la courbe pour juger ſi l'on a trouvé un *maximum* ou un *minimum*, ou même ſi l'on vouloit ſavoir ſi la courbe a un *maximum* ou un *minimum*, on s'y prendroit comme dans les problêmes ſuivans.

54. PROBLÊME. *Chercher les* maxima *& les* minima *de la courbe dont l'équation eſt* $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{y}{a}$. Donc $\frac{dx}{a} - \frac{a\,dx}{x^2} = \frac{dy}{a} = 0$, en ſuppoſant $dy = 0$; & par conſéquent $\frac{dx}{a} = \frac{a\,dx}{x^2}$, $\frac{1}{a} = \frac{a}{x^2}$, $\frac{x^2}{a} = a$, $x^2 = a^2$ & $x = \pm\sqrt{a\,a} = \pm a$. Donc les tangentes correſpondantes à l'abſciſſe poſitive $+a$ & à l'abſciſſe négative $-a$, ſeront

parallèles aux abſciſſes. Mais pour ſavoir ſi l'ordonnée correſpondante à l'abſciſſe $+ a$ eſt un *maximum* ou un *minimum*, je ſubſtitue a à la place de x dans l'équation de la courbe, & j'ai $\frac{a}{a} + \frac{a}{a} = \frac{y}{a}$, ou $2 = \frac{y}{a}$, ou $y = 2a$. En augmentant l'abſciſſe a d'une quantité infiniment petite dx, & ſubſtituant dans l'équation de la courbe $a + dx$ à la place de x, il vient $\frac{a+dx}{a} + \frac{a}{a+dx} = \frac{y}{a}$, ou (en réduiſant les fractions au même dénominateur, prenant leur ſomme, & faiſant diſparoître le dénominateur de y) $\frac{2aa + 2adx + dx^2}{a+dx} = y$, ou $2a + \frac{dx^2}{a+dx} = y$, quantité plus grande que $2a$. Si on diminue l'abſciſſe a de la quantité dx, en mettant $a - dx$ à la place de x, on aura $y = 2a + \frac{dx^2}{a-dx}$, qui eſt encore plus grande que $2a$. Donc puiſque les ordonnées croiſſent de deux côtés, il eſt évident que l'ordonnée $2a$ correſpondante à l'abſciſſe a eſt un *minimum*.

Par la même méthode, en prenant l'abſciſſe x négative & $= -a$, l'on aura $y = -2a$; & ſubſtituant $-a + dx$ à la place de x, l'on trouvera $y = -2a + \frac{dx^2}{-a+dx} = -2a - \frac{dx^2}{a-dx}$ (en changeant tous les ſignes du numérateur & du dénominateur, ou, ſi l'on veut, en multipliant le numérateur & le dénominateur par -1). Mais en ſubſtituant $-a - dx$ au lieu de x, l'on aura

aura $y = -2a - \frac{dx^2}{a+dx}$; donc puiſque les ordonnées voiſines de l'ordonnée négative $= -2a$ ſont des quantités négatives toutes les deux plus grandes que $-2a$ (*), l'ordonnée $-2a$ eſt un *minimum* négatif.

Si on propoſoit de déterminer ſi la courbe de l'équation $a^2y = x^2(a-x)$ a quelque *maximum* ou quelque *minimum* d'ordonnée, l'on auroit $a^2dy = 2xdx(a-x) - x^2dx$ qui, en faiſant $dy = 0$, donne $2xdx.(a-x) = x^2dx$, $2ax - 2xx = x^2$, $2ax = 3xx$, équation qui peut avoir lieu, en ſuppoſant $x = 0$. La diviſant par $x = 0$, l'on a $2a - 3x = 0$, $2a = 3x$, $x = \frac{2a}{3}$. La valeur de $x = 0$ fait voir que la ligne des abſciſſes touche la courbe à l'origine des abſciſſes. La deuxiéme valeur de x étant ſubſtituée dans l'équation de la courbe, donne $y = \frac{4a}{27}$; augmentant l'abſciſſe $\frac{2a}{3}$ de la quantité dx, l'on a $a^2y = (\frac{2a}{3}+dx)^2 \times (\frac{a}{3}-dx)$; d'où l'on tire $y = \frac{4a}{27} - \frac{dx^2}{a} - \frac{dx^3}{aa}$, quantité plus petite que $\frac{4a}{27}$. Si on diminue l'abſciſſe en ſubſtituant $\frac{2a}{3} - dx$, au lieu de x, on aura $y = \frac{4a}{27} - \frac{dx^2}{a} + \frac{dx^3}{aa}$, qui (à cauſe de $dx^3 < dx^2$) eſt plus petite que $\frac{4a}{27}$. Donc puiſque les ordonnées voiſines de $y = \frac{4a}{27}$ ſont toutes les deux plus petites que $\frac{4a}{27}$, cette ordonnée eſt un *maximum*.

(*) Car il eſt viſible que $-20a - a = -21.a$ eſt une quantité négative plus grande que $-20.a$.

55. PROBLÊME. *Déterminer ſi dans la courbe de l'équation* $aay = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x$ *il y a quelqu'ordonnée qui ſoit un* maximum *ou un* minimum. Par la nature de la courbe, en différenciant & ſuppoſant $dy = 0$, l'on a $3xxdx - 6axdx + 3aadx = 0$, ou (en diviſant par $3dx$) $x^2 - 2ax + aa = 0$, ou (en prenant la racine) $x - a = 0$, & $x = a$: donc la tangente au point de la courbe correſpondant à l'abſciſſe $x = a$, eſt parallèle aux abſciſſes. Mais il ne s'enſuit pas pour cela que l'ordonnée correſpondante ſoit un *maximum* ou un *minimum*; car ſubſtituant a au lieu de x dans l'équation de la courbe, l'on trouve $y = a$. Subſtituant $a + dx$ au lieu de x, l'on trouve $y = a + \frac{dx^3}{aa}$. Mais en ſubſtituant $a - dx$ au lieu de x, l'on a $y = a - \frac{dx^3}{aa}$. Donc puiſque les ordonnées croiſſent d'un côté, tandis qu'elles diminuent de l'autre, l'ordonnée $y = a$ n'eſt ni un *maximum* ni un *minimum*.

56. PROBLÊME. *Déterminer ſi la parabole a quelqu'ordonnée qui ſoit un* maximum *ou un* minimum. L'équation de la parabole eſt $y^2 = px$; donc $2ydx = pdx$; ſuppoſant $dy = 0$, l'on a $pdx = 0$, d'où on ne peut tirer aucune valeur de x. Suppoſons donc $dy = \infty$, l'on aura $pdx = \infty$; d'où l'on ne peut non plus tirer aucune valeur de x; ainſi la parabole n'a ni *maximum* ni *minimum*.

57. PROBLÈME. *Déterminer ſi dans la courbe de l'équation* $ay^2 - 2aay = x^3 - 3ax^2 + 3aax - 2a^3$ *il y a quelqu'ordonnée qui ſoit un* maximum *ou un* minimum. Différenciant & ſuppoſant $dy = 0$, l'on a $3x^2dx - 6axdx + 3aadx = 0$, ou en diviſant par $3dx$, $xx - 2ax + aa = 0$, ou (en prenant la racine) $x - a = 0$, & $x = a$. Subſtituant cette valeur de x dans l'équation de la courbe, l'on a $ay^2 - 2aay = -a^3$,

ou (en divisant par a & transposant) $y^2 - 2ay + aa = 0$; donc (en prenant la racine) $y - a = 0$, $y = a$. Si à la place de x l'on substitue $a + dx$, l'on trouvera $ay^2 - 2a^2y = -a^3 + dx^3$, équation d'où l'on tire (en transposant & divisant par a) $yy - 2ay + aa = \frac{dx^3}{a}$ & en prenant les racines, $y - a = \pm\sqrt{\frac{dx^3}{a}}$, $y = a \pm dx\sqrt{\frac{dx}{a}}$. Si l'on prend donc le signe $+$, l'on aura $y > a$; mais si l'on prend dx avec le signe $-$, c'est-à-dire, si l'on prend $-dx$, l'on aura une quantité imaginaire pour la valeur de y. En effet, $\sqrt{\frac{dx^3}{a}}$ devient dans ce cas $= \sqrt{(-\frac{dx^3}{a})}$. Donc la courbe de l'équation proposée n'a ni *maximum* ni *minimum* dans le sens que nous l'entendons ici.

REMARQUE. Si l'équation qui doit donner le *maximum* ou le *minimum* étoit absurde, comme si l'on trouvoit $5a = 2a$, ou $5b = 0$, le *maximum* ou le *minimum* indiqué par cette équation n'auroit pas lieu. Si en augmentant l'abscisse trouvée d'une quantité dx infiniment petite, on trouve une valeur imaginaire de l'ordonnée, ce qui arrive dans une courbe M N m (fig. 34) qui n'a aucun point au-delà de N, tandis que l'on trouveroit une valeur réelle, en diminuant l'abscisse de la quantité dx; c'est une marque que la courbe n'a ni *maximum* ni *minimum* dans le sens qu'on l'entend ici.

Il ne sera pas hors de propos de dire quelque chose de la méthode que l'on peut suivre pour trouver les *maxima* & les *minima* dans les courbes dont les y partent d'un foyer. Pour cela, on cherchera (41) en supposant $dy = 0$ ou $dx = 0$, la tangente perpendiculaire à l'ordonnée, ou bien la tangente parallèle à l'ordonnée, qui se confond souvent avec cette ordonnée; or il est visible que supposer $dx = 0$ dans la fraction $\frac{dy}{dx}$, c'est la même chose que supposer $dy = \infty$.

58. PROBLÈME. *Déterminer si dans la courbe dont l'équation est* $dz = \frac{y^2\,dy}{a\sqrt{(yy - aa)}}$ *il y a quelque* maximum *ou quelque* minimum *d'ordonnée*, dz (*) *désignant un arc infiniment petit*

(*) L'arc dz est le même que celui que l'on a fait $= dx$ (43).

décrit d'un rayon $= y$. Transportez l'équation de la courbe à un arc d'un rayon constant $= a$, en faisant $y : a :: dz : dx$, ou $dz = \frac{y\,dx}{a}$; ce qui donne $\frac{y\,dx}{a} = \frac{yy\,dy}{a\sqrt{(yy-aa)}}$, $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$. Si dans cette équation on suppose $dy = 0$, l'on a $dx.\sqrt{(yy-aa)} = 0$, $\sqrt{(yy-aa)} = 0$, $y^2 = aa$, $y = a$. Donc la tangente correspondante à l'ordonnée a lui est perpendiculaire. Pour savoir si l'ordonnée a est un *maximum* ou un *minimum*, il faut intégrer les deux membres de l'équation $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}} = y\,dy \times (yy-aa)^{-\frac{1}{2}}$. Mais $y\,dy$ est la différentielle de la quantité variable yy qui est sous le signe, est, dis-je, la différentielle divisée par 2 ou multipliée par $\frac{1}{2}$; donc $x = \frac{y\,dy.(yy-aa)^{-\frac{1}{2}+1}}{y\,dy} = (yy-aa)^{\frac{1}{2}}$. En supposant $y = a$, l'on a $x = \sqrt{(yy-aa)} = \sqrt{0} = 0$. L'équation $x = (yy-aa)^{\frac{1}{2}}$ donne $x^2 = yy-aa$, $y = \sqrt{(xx+aa)} = \sqrt{(00+aa)}$, en supposant $x = 0$. Si l'on augmente x de la quantité infiniment petite dx, l'on aura $y = \sqrt{(dx^2+aa)} > \sqrt{aa}$; si l'on diminue x de la quantité dx, c'est-à-dire si l'on substitue $-dx$ à la place de 0, ou de x, l'on trouve $y = \sqrt{(dx^2+aa)}$; donc puisque les ordonnées voisines croissent toutes les deux, l'ordonnée a est un *minimum*.

Pour décrire cette courbe, avec un rayon $= a$ (fig. 40), décrivez un cercle, & prenant le point A pour l'origine des $x = AP$, tirez $CPM = y = \sqrt{(a^2 + \overline{AP}^2)} = \sqrt{(aa+xx)}$. Si l'on fait $Ap = -x$ & qu'on tire $Cpm = \sqrt{(aa+\overline{Ap}^2)} = \sqrt{(aa+xx)}$, les points M & m appartiendront à la courbe. En effet de l'équation $y^2 = aa+xx$, on tire $x = (yy-aa)^{\frac{1}{2}}$, $dx = \frac{1}{2} \times 2y\,dy \times (yy-aa)^{-\frac{1}{2}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$. Maintenant si avec le rayon $CM = y$ l'on décrit l'arc infiniment petit $Mn = dz$, les

ſecteurs ſemblables CM π, CP i donneront CM : CP :: $dz : Pi = dx = \frac{a\,dz}{y}$. Subſtituant cette valeur de dx dans l'équation qu'on vient de trouver, l'on a $\frac{a\,dz}{y} = \frac{y\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$, ou $dz = \frac{yy\,dy}{a\sqrt{(yy-aa)}}$, équation de la courbe.

REMARQUE. On peut voir par là que pour déterminer le *maximum* ou le *minimum* dans ces ſortes de courbes, il faut, ſi l'on a l'équation par rapport à un arc décrit d'un rayon variable, la changer en une autre dans laquelle l'arc dx ſoit décrit avec un rayon conſtant, intégrer enſuite & voir ſi en ajoutant & en retranchant l'arc dx, les ordonnées croiſſent ou décroiſſent en même temps. Dans le premier cas, l'ordonnée eſt un *minimum*; mais elle eſt *maximum* dans le ſecond cas. Si les ordonnées croiſſent d'un côté & décroiſſent de l'autre, on n'a ni *maximum* ni *minimum*; mais ſeulement la courbe de concave devient convexe ou réciproquement, & l'on a un point d'inflexion.

59. PROBLÈME. *Déterminer le* maximum *ou le* minimum *dans la courbe dont l'équation eſt* $dx = \frac{yy\,dy}{a\sqrt{(aa-yy)}}$; *en ſuppoſant* dx *un arc décrit avec le rayon variable* y. Tranſportez l'équation à un arc décrit avec le rayon a, en faiſant $y : dx :: a : dz$, d'où l'on tire $dx = \frac{y\,dz}{a}$;

donc $\frac{y\,dz}{a} = \frac{yy\,dy}{a\sqrt{(aa-yy)}}$, $dz = y\,dy\,(aa-yy)^{-\frac{1}{2}}$,

$z = -(aa-yy)^{\frac{1}{2}}$, $z^2 = aa-yy$; ainſi z eſt $= +\sqrt{(aa-yy)}$, ce qui fait voir que l'arc z eſt $= o$ lorſque $y = a$, & imaginaire ſi $y > a$. On a auſſi $y^2 = aa - z^2$, $y = \sqrt{(aa-zz)} = \sqrt{(aa-oo)} = a$, lorſque l'ordonnée y eſt la plus grande poſſible. Si on ſubſtitue $o + dz$, ou $o - dz$ à la place de z, l'on a $y = \sqrt{(aa-dz^2)} < \sqrt{aa}$; donc l'ordonnée a eſt un *maximum*.

Pour décrire cette courbe, on prendra un rayon CA $= a$ (fig. 41), avec lequel on décrira un cercle. Prenant le

point A pour l'origine des arcs $z = AP$, Ap, on tirera les rayons CP, Cp & prenant $Cm = \sqrt{(aa - zz)}$, ou prenant Cm moyenne proportionnelle entre $a + z$ & $a - z$, le point m appartiendra à la courbe. De même prenant $Cn = \sqrt{(aa - \overline{Ap}^2)}$, le point n appartiendra auſſi à la courbe. Si l'on prend l'arc $Ag = a = CA$, l'on aura $y = \sqrt{(aa - zz)} = \sqrt{0} = 0$, ce qui prouve que la courbe paſſe par le centre C du cercle générateur. On voit auſſi que la tangente AT eſt perpendiculaire au rayon CA. Si en ſuppoſant l'arc dz décrit avec un rayon conſtant $= a$, on avoit l'équation $dz = \frac{y^2 dy}{(y^3 - a^3)^{\frac{2}{3}}}$, en ſuppoſant $dy = 0$, l'on auroit $(y^3 - a^3)^{\frac{2}{3}} = 0$, $y^3 = a^3$, $y = a$. Mais en intégrant, l'on a $z = S. y^2 dy. (y^3 - a^3)^{-\frac{2}{3}} = 3. (y^3 - a^3)^{\frac{1}{3}}$. Puiſque $z = 0$ lorſque $y = a$, à la place de z, écrivez $0 + dz$, & vous aurez $y = (a^3 + \frac{1}{3} dz^3)^{\frac{1}{3}}$. Mais en écrivant $0 - dz$ l'on a $y = (a^3 - \frac{1}{3}. dz^3)^{\frac{1}{3}}$, la premiere valeur eſt plus grande & la ſeconde plus petite que a; donc l'ordonnée a n'eſt ni *maximum* ni *minimum*. Il n'eſt pas maintenant difficile de voir comment il faut s'y prendre lorſque dy eſt infiniment plus grand que dx.

60. PROBLÊME. *D'un point donné* L *ſitué ſur l'axe d'une courbe, mener à cette courbe la plus courte ligne* L M *qu'il ſoit poſſible* (*fig.* 42). Soit $AL = b$, $AP = x$, $PM = y$: donc $PL = b - x$; mais le triangle rectangle MLP donne $(ML)^2 = (PL)^2 + (PM)^2 = bb - 2bx + xx + yy = zz$, en ſuppoſant $ML = z$. Si l'on regarde z comme l'appliquée d'une courbe, & qu'on faſſe $dz = 0$ dans le cas du *minimum*, on aura $-2bdx + 2xdx + 2ydy = 2z . dz = 0$, $ydy = bdx - xdx$ (en tranſpoſant & diviſant par 2); donc $\frac{ydy}{dx} = b - x = PL$. Or (ſelon ce qu'on a vu ci-deſſus) $\frac{ydy}{dx}$ eſt la formule de

la sous-normale ; donc P L est la normale. Si du point C situé du côté de la concavité de la courbe, on vouloit mener la plus courte ligne C M, ayant tiré les lignes C M parallèle & C p perpendiculaire à l'axe, je fais A $p = f$, C $p = m$ P $= c$, & j'ai M $m = y - c$, C $m = p$ P $= f - x$; & faisant C M $= z$, il vient $zz = (Mm)^2 + (Cm)^2 = y^2 - 2cy + c^2 + ff - 2fx + xx$. Différenciant & supposant $dz = 0$, j'ai $0 = 2y\,dy - 2c\,dy - 2f\,dx + 2x\,dx$; transposant & divisant par 2, il vient $dy \times (y - c) = dx \times (f - x)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{f-x}{y-c}$; en multipliant tout par y, l'on a $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{y \times (f-x)}{y-c}$, d'où l'on tire M $m =$ $y - c$: C $m = f - x :: y =$ P M : P L $= \frac{y\,dy}{dx}$; donc C M est normale.

Si le point N, duquel on veut mener la plus courte ligne est hors de la courbe, ayant abaissé le perpendiculaire N B, je fais la ligne connue (le point N étant donné la distance de ce point à l'axe est censée connue) N B $= c$, A B $= f$, & menant M n parallèle à l'axe A P, j'ai M n = B P $= x - f$, N $n = c - y$, & faisant la ligne N M $= z$, il vient $z^2 = (Nn)^2 + (Mn)^2 = (c-y)^2 + (x-f)^2$. En différenciant, l'on a $2z\,dz = -2\,dy\,(c-y) + 2\,dx \times (x-f)$. Faisant $dz = 0$, divisant par 2 & transposant, $dx \times (x-f) = dy \times (c-y)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x-f}{c-y}$, $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{(x-f).y}{c-y}$, d'où l'on tire $c - y =$ N n : $x - f =$ n M $:: y =$

$MP : PL = \frac{y\,dy}{dx}$; donc la ligne NM eſt normale.

Si la courbe avoit une ſeconde branche A s, dont les points correſpondans à ceux de la branche AM fuſſent également éloignés de l'axe AP, il eſt viſible qu'alors R s normale à la branche A s, ſeroit la plus courte ligne qu'on pourroit mener du point R ſitué au-deſſous de l'axe, à la branche A s.

COROLLAIRE. Il eſt aiſé de comprendre que ſi la ligne AM étoit droite au lieu d'être courbe, la plus courte ligne qu'on pourroit lui mener d'un point quelconque L, C, N ſeroit la perpendiculaire.

Pour réſoudre un grand nombre de queſtions qui dépendent de la méthode des *maximis* & *minimis*, on exprimera par une fonction de x (*) la quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum* ; on la ſuppoſera enſuite égale à une puiſſance de y, que l'on différenciera en s'y prenant comme ſi l'on vouloit chercher la plus grande ou la plus petite appliquée d'une courbe.

61. PROBLÊME. *Trouver un rectangle qui ſoit le plus grand de tous ceux dont la ſomme de la baſe & de la hauteur eſt la même &* $= 2a$. Soit x, la baſe du rectangle cherché, retranchant x de $2a$, l'on aura la hauteur $= 2a - x$, qui étant multipliée par x, donne $2ax - xx$, ſurface du rectangle cherché. Je fais cette quantité $= yy$; donc en différenciant & faiſant $dy = 0$, l'on a $2a\,dx - 2x\,dx = 0$, $2a = 2x$, & $a = x$; donc la baſe eſt égale à la hauteur, & le rectangle ſe change en un quarré dont le côté eſt $= a$ moitié de la ſomme $2a$.

REMARQUE. On peut voir aiſément que le

(*) Une fonction de x eſt une expreſſion dans laquelle x entre, ſoit qu'il y ait des conſtantes ou non.

réſultat ſeroit le même, en différenciant $2ax - xx$ & ſuppoſant ſa différentielle $= 0$. Ainſi on peut ſe diſpenſer d'introduire y.

COROLLAIRE. Si $2a$ repréſente une ligne qu'il faille partager en deux parties x & $2a - x$, dont le rectangle doive être le plus grand poſſible, on trouvera que $x = a$, c'eſt-à-dire, qu'il faut partager cette ligne en deux parties égales. Si $2a$ repréſente un nombre qu'on veuille diviſer en deux parties x & $2a - x$, de maniere que le produit $2ax - xx$ ſoit le plus grand poſſible, l'on aura $x = a$, c'eſt-à-dire, que les deux parties ſeront égales, & chacune ſera la moitié du nombre propoſé ; de ſorte que ſi ce nombre eſt 12, les deux parties ſeront chacune $= 6$, & le produit 36 ſera le plus grand qu'on puiſſe faire, en prenant pour produiſans les deux parties de 12.

Si on doutoit que le réſultat fût un *maximum* ou un *minimum*, on ſubſtitueroit $a + dx$ dans l'expreſſion $2ax - x^2 = y^2$, & l'on auroit $2a^2 + 2a\,dx - aa - 2a\,dx - dx^2 = aa - dx^2$. Subſtituant enſuite $a - dx$ au lieu de x, l'on auroit $2aa - 2a\,dx - aa + 2a\,dx - dx^2 = aa - dx^2$, donc puiſque les deux réſultats ſont tous deux plus petits que aa, qui vient de la ſuppoſition de $dy = 0$, on a trouvé un *maximum*.

62. PROBLÊME. *Inſcrire dans un cercle le plus grand rectangle poſſible.* Soit ſuppoſé (fig. 43) ABnm, le rectangle demandé, ayant mené les diamétres FG, hi parallèles aux côtés du rectangle, ce rectangle ſera diviſé en quatre rectangles égaux (*), dont l'un ſera LCgB; ainſi ſon

(*) Car un diamétre perpendiculaire à la corde d'un cercle, la diviſe en deux également. (Voyez la Géométrie).

quadruple ſera évidemment égal au rectangle cherché. Faiſant le rayon du cercle $= a$ & comptant les abſciſſes depuis le centre, l'ordonnée Bg ſera $= \sqrt{(aa - xx)}$, & le rectangle Bg CL ſera $= x\sqrt{(aa - xx)}$, dont le quadruple $4x\sqrt{(aa-xx)} = bx\sqrt{(aa-xx)}$, en ſuppoſant $4 = b$, ſera le plus grand rectangle cherché. Différenciant cette quantité & ſuppoſant la différentielle $= 0$, l'on aura $bdx\sqrt{(aa - xx)} - bxxdx(aa-xx)^{-\frac{1}{2}} = 0$, ou en diviſant par bdx & tranſpoſant, $\sqrt{(aa-xx)} = xx.(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$; multipliant tout par $(aa - xx)^{\frac{1}{2}}$, il vient $aa - xx = xx.(aa-xx)^{0} = xx$; donc $aa = 2xx$, $x^2 = \frac{aa}{2}$, $x = \sqrt{\frac{aa}{2}}$. Subſtituant cette valeur dans $4x\sqrt{(aa - xx)}$, il vient $4\sqrt{(aa - \frac{aa}{2})} \times \frac{aa}{2} =$ BAmn, & l'on a Bg $= \sqrt{(aa-xx)} = \sqrt{(aa - \frac{1}{2}aa)} = \sqrt{\frac{aa}{2}} = x$; donc le rectangle B$g$ CL a ſes deux côtés Bg, Cg égaux; donc ce rectangle & par conſéquent ſon quadruple, eſt un quarré; donc le plus grand rectangle qu'on puiſſe inſcrire dans un cercle, eſt le quarré.

63. REMARQUE. La valeur de x, que nous venons de trouver, ſeroit la même, ſi avant de différencier on eût ôté le multiplicateur conſtant b. Ainſi on peut en uſer de même toutes les fois qu'il s'agit de trouver un *maximum* ou un *minimum*. En effet, ſuppoſons que $\frac{a}{b}$ y repréſente une quantité qui doive être un *maximum* ou un

minimum, ſa différentielle, en faiſant $dy = 0$, ſera $\frac{a}{b}\,dy = \frac{a}{b} \times 0 = 0$, la même qu'on eût trouvé en ôtant les facteurs a & $\frac{1}{b}$. Si cette différentielle eſt ſuppoſée $\frac{a}{b}\,dy = \frac{m(c-x)^{m}\,dx}{(a-x)^{n}}$, & qu'alors on ſuppoſe $dy = \infty$, l'on aura $(a-x)^{n} = 0$, $a - x = 0$, $x = a$, la même que ſi y ſeul eût dû être un *maximum* ou un *minimum*; on peut donc avant de différencier ôter les multiplicateurs & les diviſeurs conſtans de la quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum*: ce qui ſert à ſimplifier le calcul.

64. PROBLÈME. *Trouver la plus courte ligne FM qu'on puiſſe mener entre les côtés indéfinis d'un angle droit FBM par un point D ſitué entre ſes côtés (fig. 44).* Ayant fait le rectangle DCBA, ſoit $AB = a$, $BC = b$, $AF = x$, on aura $(FD)^{2} = (AF)^{2} + (AD)^{2} = (AF)^{2} + (BC)^{2} = x^{2} + b^{2}$, & $FD = \sqrt{(b^{2} + xx)}$. Mais à cauſe des triangles ſemblables FAD & FBM, on a FA : FD :: FB : FM, ou $x : \sqrt{(bb + xx)} :: a + x : FM = \frac{a+x}{x} \times \sqrt{(bb + xx)}$. Suppoſant cette quantité $= y$ & différenciant, il vient $dy = \frac{(x\,dx - a\,dx - x\,dx)}{x^{2}} \times \sqrt{(bb+xx)} + \frac{(a+x)}{x} \times \frac{1}{2} \times 2x.\,dx.(bb+xx)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{a\,dx}{xx} \times \sqrt{(bb+xx)} + \frac{axdx + xxdx}{x\sqrt{(bb+xx)}}$. En réduiſant au même dénominateur, l'on a $dy = \frac{-abbdx - axxdx + axxdx + xxxdx}{x^{2}\sqrt{(bb+xx)}}$.

Réduiſant & ſuppoſant $dy = 0$, ôtant le dénominateur & diviſant par dx, il vient $-abb + x^{3} = 0$, $x^{3} = abb$ & $x = \sqrt[3]{abb}$. Si donc on cherche deux moyennes proportionnelles entre b

& a, la premiere ſera $= x$ (*); prenant donc AF égale à cette premiere moyenne proportionnelle, par les points F & D, on tirera FDM, qui ſera la ligne cherchée. Si dans l'expreſſion $\frac{-abbdx-ax^2dx+x^3dx}{x^2\sqrt{(bb+xx)}} = dy$ $= \frac{-abbdx+x^3dx}{x^2\sqrt{(bb+xx)}}$ on ſuppoſe dy infini, l'on aura $x^2\sqrt{(bb+xx)} = 0$, $bb+xx=0$, $xx=-bb$, $x = \pm\sqrt{(-bb)}$, quantité imaginaire qui fait voir qu'il n'y a pas d'autre *minimum* que celui qui eſt indiqué par $x = \sqrt[3]{(abb)}$.

REMARQUE. Pour avoir x, on décrira autour de l'axe AM (fig. 45) avec un paramétre $= b$ la parabole ADP; prenant $AB = \frac{b}{2}$ & menant BC perpendiculaire à l'axe AM & $= \frac{a}{2}$, du point C avec le rayon CA, on décrira un arc de cerle AND, qui rencontrera la demi-parabole AP en un point D; & l'ordonnée DM ſera $= x$. En effet, $DF = DM - CB = x - \frac{a}{2}$. Mais par la nature de la parabole, $AM \times b = (DM)^2$, ou $(AM) = \frac{xx}{b}$; donc $BM = \frac{b}{2} - \frac{xx}{b}$. Et parce que $CF = BM$, l'on aura $(CD)^2 = (x-\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2} - \frac{xx}{b})^2$, quantité qui ſe réduit à $-ax + \frac{a^2}{4} + \frac{x^4}{bb} + \frac{b^2}{4}$. De plus, $CD = CA$, & $(CA)^2 = (AB)^2 + (CB)^2 = \frac{bb}{4} + \frac{aa}{4}$; donc $\frac{bb}{4}$

(*) Soit x la premiere, z la ſeconde moyenne proportionnelle cherchée; donc on aura $\div b : x : z : a$ (voyez le calcul); & $b^3 : x^3 :: b : a$, $b^3 a = x^3 b$, $x^3 = b^2 a$, & $x = \sqrt[3]{bba}$.

$+\frac{aa}{4} = -ax + \frac{x^4}{bb} + \frac{aa}{4} + \frac{b^2}{4}$; donc transposant & réduisant, $\frac{x^4}{bb} = ax$, $x^4 = bbax$, $x^3 = bba$, $x = \sqrt[3]{abb}$; donc DM $= x$.

REMARQUE. La progression $\div b : x : : x : a$ (derniere note) donne $b : a :: b^3 : x^3$, & en renversant la proportion, $x^3 : b^3 :: a : b$; donc si a est double, ou triple, ou quadruple, &c. de b, le cube de x sera double, ou triple, ou quadruple, &c. de celui de b; donc on peut facilement résoudre le problême de la duplication du cube par le moyen du cercle & de la parabole.

65. PROBLÊME. *Inscrire le plus grand triangle possible dans un demi-cercle A B m* (*fig.* 46). Soit le diamétre A $m = a$, & le côte AB $= x$. Puisque l'angle B appuyé sur le diamétre est droit, le triangle A B m sera rectangle, & l'on aura $(Bm)^2 = (Am)^2 - (BA)^2$, $Bm = \sqrt{(aa - xx)}$ & le triangle A B m sera $= \frac{1}{2}$ AB. $Bm = \frac{1}{2} x \sqrt{(aa - xx)}$, dont la différence égalée à 0, donne $\frac{dx}{2} \times \sqrt{(aa - xx)} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} x \times -2x\,dx \times (aa - xx)^{-\frac{1}{2}} = 0 = \frac{dx}{2}.\sqrt{(aa - xx)} - \frac{x\,dx}{2\sqrt{(aa - xx)}} = 0$, ou en réduisant au même dénominateur, $\frac{aa\,dx - 2xx\,dx}{2\sqrt{(aa - xx)}} = dy = 0$; donc $aa - 2xx = 0$, $aa = 2xx$, $xx = \frac{aa}{2}$, $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$

Substituant cette valeur dans $Bm = \sqrt{(aa - xx)}$, l'on a $Bm = \sqrt{(\frac{2aa}{2} - \frac{aa}{2})} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; donc BA $=$ B m, c'est-à-dire, que le triangle

isocelle est le plus grand qu'on puisse inscrire dans un demi-cercle.

Si on supposoit $dy = \frac{aa\,dx - 2xx\,dx}{2\sqrt{(aa-xx)}} = \infty$, l'on auroit $2\sqrt{(aa-xx)} = 0$, $aa - xx = 0$, $aa = xx$, $a = x$; donc le côté AB seroit égal au diamétre Am, avec lequel il se confondroit; & par conséquent il n'y auroit point de triangle, ou, si l'on veut, le triangle seroit $= 0$; ainsi on ne peut avoir aucune autre solution admissible de ce problême que celle qu'on vient de donner.

66. PROBLÊME. *Inscrire dans une sphère un cône dont la surface convexe soit la plus grande possible* (*fig.* 47). Soit le diamétre de la sphère $= a$, la hauteur AD (du cône cherché CAm) $= x$; la surface convexe de ce cône étant égale au produit de la circonférence décrite du rayon DC multipliée par la moitié de AC, & les circonférences étant dans le rapport des rayons, la surface cherchée sera proportionnelle à $CD \times AC$. Or $AC = \sqrt{(a.x)}$ & $CD = \sqrt{(ax - xx)}$, comme tout le monde le sait; donc $AC.\,CD = \sqrt{ax} \times \sqrt{(a.x - xx)} = \sqrt{(a^2xx - ax^3)}$; donc puisque cette quantité doit être un *maximum*, son quarré $a^2xx - ax^3$ le sera aussi; donc $2a^2x\,dx - 3ax^2\,dx = 0$, $2a - 3x = 0$, $2a = 3x$, & $x = \frac{2a}{3}$; ainsi l'axe du cône cherché doit être les deux tiers du diamétre de la sphère.

REMARQUE. Dans le dernier problême, nous avons pris la différentielle, non de la surface du cône, mais d'une quantité proportionnelle à cette surface ou qui étoit en raison donnée avec cette surface; or c'est ce qui est toujours permis dans le cas du *maximum* ou du *minimum*; car soit supposée

une quantité quelconque $cx - x^3 = y$, dont on veut avoir le *maximum* ou le *minimum*. Si au lieu de différencier cette quantité, je différencie la quantité $\frac{b}{a}(cx - x^3)$, qui lui est proportionnelle, ou qui est à la quantité proposée dans le rapport de $a : b$, puisque l'on a $a : b :: cx - x^3 : \frac{b}{a} \times (cx - x^3)$, l'on aura (63) la même valeur de x. Cette remarque peut être utile dans plusieurs cas.

67. PROBLÊME. *Sur la droite Am comme hypothénuse, construire le plus grand triangle rectangle possible* (*fig.* 46). Soit la droite $Am = a$, le côté $AB = x$; donc l'autre côté sera $= \sqrt{(aa - xx)}$, & multipliant $\frac{AB}{2}$ par Bm, l'on aura $\frac{x}{2} \times \sqrt{(aa - xx)}$ pour l'expression de la surface du triangle; donc en opérant comme ci-dessus (65), on aura $AB = Bm = \sqrt{\frac{aa}{2}}$; c'est-à-dire, que le plus grand triangle cherché doit être isocelle. Donc si sur le diamétre Am on construit un demi-cercle & que du milieu B de ce demi-cercle on tire les cordes BA, Bm, on aura le triangle cherché.

68. PROBLÊME. *Inscrire un cylindre bnmf* (*fig.* 48) *dans une sphère, de maniere que ce cylindre ait la plus grande surface convexe possible.* Soit le rayon Ca de la sphère $= a$, & supposons que Pp représente l'axe du cylindre, CP étant $= x$, l'on aura $(Pm)^2 = aa - xx$, par la propriété du cercle; or la circonférence du cercle décrit avec le rayon Pm, est comme cette ligne. De plus, il est visible que $Pp = 2x$ (car si du centre C on tire Cs perpendiculaire sur nm, $nm = pP$, sera coupée en deux également en s); donc la quantité $2x.\sqrt{(aa - xx)}$ est proportionnelle à la

ſurface convexe du cylindre cherché; ainſi en faiſant $y = 2x.\sqrt{(aa - xx)}$, ou $yy = 4xx\,aa - 4x^4$, l'on aura $2y\,dy = 0 = 8x.aa\,dx - 16x^3\,dx$, $aa - 2xx = 0$, $aa = 2xx$, $x^2 = \frac{aa}{2}$, & $x = \sqrt{\frac{aa}{2}}$. Prenant donc $CP = \sqrt{\frac{aa}{2}}$, ou prenant CP moyenne proportionnelle entre a & $\frac{a}{2}$, l'on aura le point P, par lequel menant l'ordonnée Pm, le cercle du rayon Pm ſera la baſe, & Pp l'axe du cylindre cherché.

REMARQUE. Si la courbe Amfb étoit une ellipſe dont le demi-grand axe fût $= a$, & le demi-petit axe $= b$, l'on auroit $Pm = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$; & multipliant cette quantité par $2x$, le produit ſeroit proportionnel à la ſurface du cylindre inſcrit dans l'ellipſoïde. Or, ce produit eſt en raiſon donnée avec celui que l'on vient de trouver pour la ſphère; donc (remarque du n°. 66) on trouveroit la même valeur de x. L'on trouveroit auſſi la même valeur de x, s'il s'agiſſoit d'inſcrire le plus grand rectangle dans une ellipſe; car ce rectangle ſeroit $= 2Pm \times 2x = 4x\frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$; donc on aura le plus grand rectangle qu'on puiſſe inſcrire dans une ellipſe, & le cylindre de la plus grande ſurface convexe qu'on puiſſe inſcrire dans une ellipſoïde, en prenant $CP = x = \sqrt{\frac{aa}{2}}$. Subſtituant cette valeur dans celle de $(Pm)^2$, on a $(Pm)^2 = \frac{bb}{aa} \times \frac{aa}{2} = \frac{bb}{2}$, & $Pm = \sqrt{\frac{bb}{2}}$, qui eſt moyenne proportionnelle entre b & $\frac{b}{2}$.

Mais

Mais la solidité du cylindre inscrit dans la sphère étant proportionnelle à $2x.\overline{Pm}^2$ ou à $2aax - 2x^3$; pour avoir le plus grand cylindre qu'on puisse inscrire dans une sphère, on égalera à 0 la différentielle de cette quantité, ce qui donnera $2aadx - 6x^2dx = 0$, $x = \sqrt{(\frac{a}{3}.a)}$, & $2x = 2.\sqrt{(\frac{a}{3}.a)}$. Telle sera la hauteur du plus grand cylindre qu'on peut inscrire dans une sphère dont le rayon $= a$. A l'égard du rayon de sa base, il est aisé de voir que Pm est alors $= \sqrt{(\frac{2a}{3}.a)}$.

69. PROBLÊME. *Diviser une ligne Ab (fig. 49) en deux parties en c, de maniere que le produit de $(Ac)^m$ par $(cb)^n$ soit le plus grand possible.* Soit la ligne $Ab = a$, $Ac = x$; donc $cb = a - x$; donc en faisant $y = x^m(a-x)^n$, l'on aura $dy = 0 = mx^{m-1}dx \times (a-x)^n - nx^m dx(a-x)^{n-1} = 0$; donc transposant & divisant par $x^{m-1} \times (a-x)^{n-1}dx$, il vient $ma - mx = nx$, $ma = mx + nx$, $x = \frac{ma}{m+n}$; donc si $m = 2$ & $n = 1$, l'on a $x = \frac{2a}{3}$; c'est-à-dire, le plus grand parallélipipède qu'on puisse former, en prenant pour base le quarré de la partie Ac, & pour hauteur le reste de la ligne Ab, aura lieu, lorsque Ac sera les $\frac{2}{3}$ de la ligne Ab. Si $m = n = 1$, x sera $= \frac{a}{2}$; ainsi le plus grand rectangle qu'on puisse faire avec les deux parties d'une ligne a, aura lieu, lorsque ces parties seront égales; si a représente un nombre & qu'on suppose $m = 3$ & $n = 2$, l'on aura $x = \frac{3a}{5}$, & par conséquent $cb = a - x = \frac{2a}{5}$; donc le plus grand pro-

duit qu'on puiſſe faire en diviſant un nombre en deux parties & multipliant le cube de l'une par le quarré de l'autre, aura lieu lorſque la premiere partie ſera les $\frac{3}{5}$ de ce nombre, & la ſeconde les deux cinquiémes; c'eſt pourquoi ſi le nombre donné eſt 10, la premiere partie ſera $= 6$, & la ſeconde $= 4$, & le produit du cube 216 par le quarré 16 ou 3456 eſt le plus grand produit qu'on puiſſe faire de cette maniere. Si n étoit un nombre négatif, la quantité $x^m (a - x)^n$ ſeroit alors un *minimum*. Par exemple, ſuppoſant $m = 3$ & $n = -2$, l'on auroit $x = 3a$, & $x^m (a - x)^n = (3a)^3 . (-2a)^{-2} = \frac{27aaa}{4aa} = \frac{27a}{4}$, qui ſeroit un *minimum*. Si $n = -1$ & $m = 2$, l'on aura $\frac{x^2}{a - x}$, qui, en ſuppoſant $x = \frac{2a}{2-1} = 2a$, devient $= \frac{4aa}{a - 2a} = \frac{4aa}{-a} = -4a$. Donc alors le point cherché C ſe trouvera ſur le prolongement de la ligne A*b*, de maniere que A C ſera $= 2a = \frac{ma}{m-n} = 2a$. Si on ſuppoſe le dénominateur $a - x = 0$, l'on a $\frac{4aa}{a-a} = \frac{4aa}{0} = \infty$; donc il y a un *maximum* pour ce cas. En effet, ſi l'on ſuppoſe x moindre ou plus grand que a, l'on trouve une quantité plus petite qu'en ſuppoſant $x = a$.

70. PROBLÊME. *Diviſer une ligne a en trois parties* $A = x$, $B = z$, $C = a - x - z$ *telles que leur produit* $g = x^m z^n (a - x - z)^r$ *ſoit le plus grand poſſible.* Je différencie le produit g, en regardant d'abord z comme conſtant, & j'ai $m\,dx . x^{m-1} z^n$

$\times (a-x-z)^r - r\,dx.x^m z^n (a-x-z)^{r-1} = 0$. Diviſant par $dx\,x^{m-1} z^n \times (a-x-z)^{r-1}$, il vient $m.(a-x-z) - rx = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{ma-mz}{m+r}$. Cette valeur de x étant ſubſtituée dans le produit g, donnera en ôtant le facteur conſtant, $z^n (a-z)^{m+r}$. La différentielle de cette quantité étant diviſée par $dz.z^{n-1}$ & égalée à 0, donne $na - nz - mz - rz = 0$, ou $z = \frac{na}{m+n+r}$. Subſtituant cette valeur dans celle de x, l'on trouve $A = \frac{ma}{m+n+r}$. Subſtituant la même valeur de z & celle de x, que nous venons de trouver dans celle de C, on a $C = \frac{ra}{m+n+r}$. Si $m = n = r = 1$, les trois parties ſeront égales, & chacune ſera le tiers de la ligne a; c'eſt la même choſe s'il s'agit d'un nombre. Si l'on veut diviſer une ligne ou un nombre a en quatre parties $A = x$, $B = z$, $C = u$, $D = a - x - z - u$, telles que le produit de $A^m B^n C^r D^s$, ſoit un plus grand, en faiſant $m + n + r + s = t$, on aura $A = \frac{ma}{t}$, $B = \frac{na}{t}$, $C = \frac{ra}{t}$, $D = \frac{sa}{t}$; de ſorte que les parties de la ligne ou du nombre a ſont entr'elles comme les expoſans de ces parties; ce qui a lieu, quel que ſoit le nombre des parties. Si le nombre donné eſt $= 6$, & que $m = 3$, $n = 2$, $r = 1$, les trois parties ſeront 3, 2, 1, & le produit du cube de la premiere par le quarré de la ſeconde, & la premiere puiſſance de la troiſiéme ſera $= 108$, qui eſt le

plus grand produit qu'on puiſſe faire avec les trois parties de 6, en multipliant le cube de la premiere par le quarré de la ſeconde, & la premiere puiſſance de la troiſiéme.

On peut remarquer que lorſque la quantité cherchée répond à pluſieurs inconnues qui dépendent l'une de l'autre, on peut les ſuppoſer l'une après l'autre variables & les autres conſtantes, & mettre les valeurs trouvées dans la premiere expreſſion juſqu'à ce qu'il n'y ait qu'une inconnue, & alors on trouvera la quantité cherchée par la méthode qu'on a ſuivie dans le problême.

71. PROBLÈME. *De tous les triangles qu'on peut conſtruire ſur la même baſe* A *m & de même périmètre, quel eſt celui dont la ſurface eſt la plus grande (fig. 50)?* Soit le périmètre $= 2p$, la baſe A $m = a$, le côté A $b = x$, le côté $b\,m$ ſera $= 2p - a - x$. Or (ſelon ce qu'on a dit dans la Géométrie) la ſurface cherchée eſt $= \sqrt{p.(p-a).(p-x).(a+x-p)}$. Suppoſant cette quantité $= y$ & quarrant, il vient $p \times (p-a) \times (p-x) \times (a+x-p) = y^2$ ou en exprimant le logarithme par L & ſe ſouvenant que la ſomme des logarithmes des produiſans eſt égale au logarithme du produit, $L.p + L.(p-a) + L.(p-x) + L.(a+x-p) = 2\,L.y$, & parce que p & a ſont des quantités conſtantes, $\frac{-dx}{p-x} + \frac{dx}{a+x-p} = \frac{2dy}{y} = 0$, en faiſant $dy = 0$; donc $\frac{1}{a+x-p} - \frac{1}{p-x} = 0$ ou $\frac{1}{a+x-p} = \frac{1}{p-x}$ ou $p - x = a + x - p$; donc $2p - a = 2x$; ainſi les côtés A b & $b\,m$ ſont égaux, & le triangle cherché eſt iſocelle.

COROLLAIRE. Donc entre tous les triangles de même périmètre $2p$, celui qui a le plus de ſurface eſt équilatéral. Car ſi A m b eſt le triangle cherché, quelle que ſoit ſa baſe A m, les deux autres côtés doivent être égaux, ſelon ce qu'on vient de dire; donc en appellant $2x$ cette baſe, $2p - 2x$ ſera l'expreſſion de la ſomme des deux autres côtés, & $p - x$ ſera l'expreſſion de chacun de ces côtés. Donc la ſurface y ſera =

$\sqrt{p.(p-2x).(x).(x)}$; $2\,L.y = L.p + L.(p-2x) + 2\,L.x$, $\frac{2dy}{y} = 0 = \frac{-2dx}{p-2x} + \frac{2dx}{x}$, $\frac{-2}{p-2x} + \frac{2}{x} = 0$, $\frac{2}{x} = \frac{2}{p-2x}$, $p-2x = x$, $p = 3x$, $x = \frac{p}{3}$ & $2x = \frac{2p}{3}$; donc la baſe eſt le tiers du périmètre, & comme chacun des autres côtés eſt $= p - x = p - \frac{p}{3} = \frac{3p-p}{3} = \frac{2p}{3}$, le triangle doit être équilatéral.

72. PROBLÊME. *Entre tous les parallelipipèdes égaux à un cube donné b^3 & qui ont pour un de leurs côtés la ligne a, trouver celui qui a la plus petite ſurface.* Soit x l'un des côtes cherchés, le produit $a.x$ ſera égal à une des faces qu'on peut conſidérer comme la baſe; diviſant la ſolidité b^3 par la baſe ax, l'on a la hauteur $\frac{b^3}{ax}$. Multipliant cette hauteur par a & par x, on aura deux produits, dont la ſomme ſera la moitié de la ſurface latérale; donc $ax + \frac{b^3}{x} + \frac{b^3}{a}$ eſt la moitié de la ſurface. Égalant à 0 la différentielle de cette quantité, l'on a $adx - \frac{bbbdx}{xx} = 0$, $a = \frac{b^3}{xx}$, $x^2 = \frac{b^3}{a}$, $x = \sqrt{\frac{b^3}{a}}$; donc le côté $\frac{b^3}{ax} = \sqrt{\frac{b^6}{aaxx}} = \sqrt{\frac{b^3}{a}}$; donc un des côtés $= a$ & les deux autres, ſont chacun $= \sqrt{(\frac{b^3}{a})}$.

73. PROBLÊME. *Entre tous les parallelipipèdes égaux au cube b^3, quel eſt celui de la moindre ſurface?*

Si on nomme un des côtés x, chacun des autres ſera $\sqrt{\frac{b^3}{x}}$, comme il ſuit de ce qu'on vient de dire (*); ainſi en prenant la ſomme des produits des trois côtés, l'on aura la demi-ſuperficie (**) $= 2x\sqrt{\frac{b^3}{x}} + \sqrt{\frac{b^3}{x}} \times \sqrt{\frac{b^3}{x}} = 2\sqrt{(b^3 x)} + \frac{b^3}{x} = y$, $dy = 0 = \frac{b^3 dx}{\sqrt{(b^3 x)}} - \frac{b^3 dx}{x^2}$; donc $x^2 = \sqrt{(b^3 x)}$, $x^4 = b^3 x$, $x^3 = b^3$, $x = b$; donc le côté $x = b$; & comme chacun des autres eſt $= \sqrt{\frac{b^3}{x}} = \sqrt{\frac{b^3}{b}} = \sqrt{b^2} = b$, il eſt viſible que le cube propoſé ſatisfait à la queſtion.

74. PROBLÊME. *Entre tous les cônes qui ont la même ſolidité donnée, trouver celui de la moindre ſurface convexe.* Soit y le rayon de la baſe, x la hauteur, $\sqrt{(yy + xx)}$ ſera le côté du cône; & faiſant $1 : c :: y : cy$, on aura la circonférence du rayon y, c étant la circonférence du rayon $= 1$; donc $cy\sqrt{(yy + xx)}$ ſera comme la ſurface cherchée, que je ſuppoſe $= z$. Donc en omettant le facteur conſtant, $z^2 = y^4 + xxy^2$, différenciant & ſuppoſant $dz = 0$, l'on a $2z.dz = 0 = 4y^3 dy + 2xyydx + 2x^2 ydy$. Maintenant la ſolidité étant comme le produit de la baſe (qui eſt comme le quarré du rayon y) & de la hauteur, l'on a la ſolidité proportionnelle à xyy. Mais la ſolidité eſt conſtante par la ſuppoſition; donc la différentielle de $y^2 x$ ſera $= 0$; ainſi $2yxdy + y^2 dx$

(*) Il n'y a qu'à changer a en x.

(**) Car pour avoir la ſurface totale, il faut doubler la baſe & prendre deux fois le produit d'un côté de la baſe par la hauteur, à cauſe des deux faces oppoſées égales.

$= 0$, $y\,dx = -2x\,dy$. Substituant cette valeur de $y\,dx$ dans la différentielle de la surface, l'on a $4y^3\,dy - 4x^2\,y\,dy + 2x^2\,y\,dy = 0$, ou $4y^2 - 2x^2 = 0$, $4y^2 = 2x^2$, $2y^2 = xx$; donc le quarré du rayon de la base doit être la moitié du quarré de la hauteur.

Si étant donnée la solidité d'un vase cylindrique rempli d'eau, on demande quelles doivent être ses dimensions pour qu'il contienne une quantité de liquide donnée, sa surface interne étant la plus petite possible, on fera $= a^3$ la quantité donnée de liquide, ou la solidité ou le volume de l'espace intérieur du vase, x le diamètre intérieur, z la hauteur intérieure, & le rapport du diamètre à la circonférence $= 1 : c$. La base du vase sera donc $\frac{cx^2}{4}$, sa capacité $= a^3 = \frac{cx^2z}{4}$, & la surface concave $= cxz$. A cause de $a^3 = \frac{cx^2z}{4}$, ou de $z = \frac{4a^3}{cx^2}$, on aura $cxz = \frac{4a^3}{x}$. Or la surface de la base est $= \frac{cx^2}{4}$; donc la surface cherchée est $\frac{4a^3}{x} + \frac{cx^2}{4}$, qui doit être un *minimum*; ainsi l'on aura $\frac{-4a^3\,dx}{x^2} + \frac{cx\,dx}{2} = 0$ ou $-4a^3 + \frac{cx^3}{2} = 0$ ou $cx^3 = 8a^3$ ou $x^3 = \frac{8a^3}{c}$, $x = \frac{2a}{\sqrt[3]{c}}$, & $z = \frac{4a^3}{cx^2} = \frac{a\sqrt[3]{c^2}}{c} = \frac{a\sqrt[3]{c^3}}{\sqrt[3]{c}\sqrt[3]{c^3}} = \frac{a}{\sqrt[3]{c}}$. Donc la hau-

teur intérieure de ce vaſe doit être égale au demi-diamètre de ſa baſe intérieure, & ſa ſurface concave doit être $= \frac{4a^3}{x} + \frac{cx^2}{4} = 2aa \times \sqrt[3]{c} + a^2\sqrt[3]{c} = 3a^2\sqrt[3]{c}$.

75. PROBLÊME. *Dans un triangle trouver un point o (fig. 51) tel que la ſomme des lignes tirées de ce point aux trois angles ſoit un* minimum. Du point *b* je décris un arc de cercle qui paſſe par le point *o* cherché; ſuppoſant le rayon de cet arc conſtant & $= g$, $ao = y$, $oc = x$, j'ai $g + y + x$, qui doit être un moindre. Donc $dy + dx = 0$, $dy = -dx$; donc en ſuppoſant que l'arc infiniment petit *oi*, qu'on peut regarder comme une ligne droite, repréſente la différence de l'arc *fo*, les parties *on*, *om* des lignes *ao*, *co*, compriſes entre le point *o*, & les lignes *im*, *in* tirées perpendiculairement ſur *co* & *ao*, pourront repréſenter les différences de ces lignes, qui par conſéquent ſont égales, & l'angle $noi = moi$ (*). Mais ces angles étant ajoutés aux angles droits *iob*, *bor* (on doit faire attention que les angles *ion*, *tor* ſont oppoſés au ſommet, & par conſéquent égaux, & qu'ainſi on peut ajouter *tor* au lieu de *ion*), donneront les angles *boc*, *boa* égaux. En concevant un arc de cercle décrit du point *a*, on prouvera de même que les angles *aob*, *aoc* ſont égaux; donc les angles que doivent faire entr'elles les lignes tirées du point *o* aux trois angles du triangle, ſont égaux; & comme ces angles valent 360°, chacun eſt de 120°.

(*) Si du quarré de l'hypoténuſe *oi* l'on ôte les quarrés des côtés *on*, *om*, les racines des reſtes égaux donneront les côtés égaux *in*, *im*; donc les triangles *omi*, *oni* ont tous leurs côtés égaux auſſi bien que leurs angles.

REMARQUE. Le problême n'eſt pas toujours poſſible. Car ſi le triangle abc étoit iſocelle de maniere que l'angle acb fût de 140°, le point o tomberoit en dehors du triangle acb; ainſi il n'y auroit aucun point o dans le triangle propoſé, duquel on peut mener les lignes oc, ob, oa; de maniere que les angles que formeroient ces lignes fuſſent de 120° degrés chacun.

76. PROBLÊME. *Inſcrire dans un cercle le plus grand triangle poſſible.* Si on conçoit pluſieurs triangles décrits ſur la même corde AD (fig. 52), il eſt aiſé de déterminer le plus grand; car ayant diviſé AD en deux parties égales en m & par le centre C tiré la ligne Cm, qui rencontre la circonférence en B, le triangle BAD ſera le plus grand qu'on puiſſe conſtruire ſur la corde AD; car la baſe étant la même, les triangles ſeront comme les hauteurs ou les perpendiculaires ſur cette baſe. Or Bm eſt évidemment la plus grande perpendiculaire qu'on puiſſe abaiſſer d'un point quelconque de la circonférence ſur la corde AD; donc le triangle demandé doit être iſocelle. Soit le rayon du cercle $= a$, l'abſciſſe C$m = x$; donc par la nature du cercle, $mD = \sqrt{(aa - xx)}$, & le triangle BAD ſera $= (a+x).\sqrt{(aa-xx)}$, que je ſuppoſe $= y$; donc $y^2 = (a+x)^2 \times (aa-xx)$, & $2ydy = 0 = 2dx \times (a+x) \times (aa-xx) - 2xdx.(a+x)^2 = 0$; donc $2.(a+x).(aa-xx) = 2x(a+x)^2$, $(aa-xx) = x \times (a+x)$, ou en diviſant tout par $a+x$, $a-x = x$, $a = 2x$, $x = \frac{a}{2}$; diviſant donc CF en deux parties égales en m & menant la corde AmD perpendiculairement à CF, le triangle ADB ſera le plus grand triangle

cherché; or ce triangle eſt équilatéral, & chaque côté eſt $= a\sqrt{3}$; ce qu'on trouvera aiſément, en ſubſtituant la valeur de x dans celle de mD & doublant; car $mD = \sqrt{(aa - xx)} = \sqrt{\frac{3aa}{4}}$ $= \frac{1}{2}a.\sqrt{3}$ dont le double $= a\sqrt{3}$. De même ſi on ſubſtitue les valeurs de Bm & de mD dans DB $= \sqrt{(mD)^2 + (Bm)^2}$, on aura $DB = AB = a.\sqrt{3}$. On peut ſur la corde AD inſcrire un autre triangle iſocelle AFD, hors duquel ſe trouve le centre du cercle; mais celui-ci, parce que Cm augmentant ou diminuant, le triangle augmente ou diminue, n'eſt ni un *maximum* ni un *minimum*.

77. PROBLÊME. *Circonſcrire à un cercle le plus petit triangle poſſible* (*fig.* 53). Suppoſons que le triangle Agf ſoit le triangle demandé, je dis que ſi par le ſommet de l'angle A & le centre c du cercle on mene la ligne Acn, le côté gf ſera perpendiculaire à cette ligne, & la rencontrera en n, de maniere que le triangle Agf ſera iſocelle. Car ſi on mene une autre tangente sLh, le triangle Ahs ſera plus grand que Agf. Pour le prouver, je tire la ligne fm parallèle à sg; & les triangles sig, fmi étant ſemblables, l'on a $fi : gi :: fm : gs$; mais $fi > gi$; donc $fm > gs$. D'ailleurs $fi : ig :: im : si$; donc $mi > is$; donc à plus forte raiſon $ih > is$; & partant $fm \times hi > gs \times si$. Mais le triangle ifh eſt comme le produit $ih.fm$, & le produit $gs \times si$ eſt comme le triangle gsi (*). Donc le triangle

(*) Car ſi des angles g & f on abaiſſoit des perpendiculaires ſur les côtés oppoſés, ces perpendiculaires qui ſeroient les hauteurs des triangles, ſeroient dans le rapport des côtés homologués (voyez la Géométrie).

$ifh > isg$, & en ajoutant le quadrilatère A sif, l'on aura A $sh >$ A gf; ainſi A gf eſt le plus petit triangle poſſible. Maintenant pour déterminer le point A duquel en menant les tangentes A g, A f, qui, avec la tangente gf, doivent donner le plus petit triangle cherché, par le point n & le centre c, je mene la ligne ncA & ſuppoſant $cA = x$, le rayon $cb = a$; j'ai $An = x + a$, $pA = x - a$, $Ab = \sqrt{(xx - aa)}$; or $Ab : cb :: An : gn$ (à cauſe des triangles rectangles ſemblables A bc, A gn) ou $\sqrt{(xx - aa)} : a :: x + a : gn = \frac{a(x+a)}{\sqrt{(xx-aa)}}$. Multipliant cette quantité par $x + a$, l'on a le triangle cherché $= a.\frac{(x+a)^2}{\sqrt{(xx-aa)}} = y$, $y^2 = \frac{aa.(x+a)^4}{xx-aa} = \frac{aa.(x+a)^3}{x-a}$, $2ydy = 0 = \frac{3.aadx.(x+a)^2.(x-a) - aadx.(x+a)^3}{(x-a)^2}$ ou $3.(x+a)^2.(x-a) = (x+a)^3$, $3.(x-a) = x + a$, $3x - x = a + 3a$, ou $2x = 4a$, $x = 2a$. C'eſt pourquoi prenant cA égal au diamêtre, & du point A menant des tangentes juſqu'à la rencontre de la tangente gnf, l'on aura le triangle cherché. Ce triangle eſt équilatéral, & chacun de ſes côtés eſt $= 2a\sqrt{3}$. En effet, les triangles rectangles ſemblables A bc, A ng donnent Ab : A c :: A n : A g; ou en quarrant & mettant les valeurs algébriques $3aa$ (*) : $4aa :: 9aa$: (A $g)^2 = 12.aa = 4aa \times 3$; donc A g = A f $= 2a\sqrt{3}$. Mais $(ng)^2 = (Ag)^2 - (An)^2$ $= 12aa - 9aa = 3aa$; donc $ng = a\sqrt{3}$ & gf $= 2a\sqrt{3}$.

(*) Le triangle rectangle A bc donne $(Ab)^2 = (Ac)^2 - (bc)^2 = 4aa - aa = 3aa$.

REMARQUE. Dans le dernier problême, on a trouvé que le côté du plus grand triangle qu'on puisse inscrire dans un cercle dont le rayon est $= a$, étoit $= a\sqrt{3}$; donc le côté du plus grand triangle qu'on peut inscrire dans un cercle, n'est que la moitié du côté du plus petit triangle qu'on peut circonscrire au même cercle; & partant ces triangles sont entr'eux comme 1 : 4.

On peut quelquefois résoudre facilement les problêmes de *maximis* & *minimis* sans le secours du calcul différentiel.

78. PROBLÊME. *Dans un quadrilatère a b f c (fig. 54) trouver un point i tel que la somme des lignes tirées de ce point aux quatre angles soit un minimum.* Le point d'intersection des deux diagonales résout le problême; car la somme $m a + m c$ des lignes tirées aux angles a & c d'un autre point quelconque m, est plus grande que $c a$, de même $(m b + m f) > b f$; donc &c.

79. PROBLÊME. *Trouver la plus grande surface que deux droites A M, A B données avec une indéterminée* MB *peuvent renfermer (fig. 55).* Il est visible que le triangle MAB sera le plus grand, lorsque l'angle A sera droit; car il aura plus de hauteur que tout autre triangle $a b m$ de même base qui auroit les côtés $a m$, $a b$ égaux respectivement aux côtés AM & AB.

80. PROBLÊME. *Trouver la plus grande surface qui puisse être contenue entre quatre lignes données & une indéterminée (fig. 56).* Je dis que si les droites AB, BC, CP, PD données sont inscrites dans un demi-cercle, dont le diamètre AD soit l'indéterminé, elles contiendront la plus grande surface possible; car on vient de prouver que la surface que deux lignes données avec une indéterminée peuvent

contenir, est la plus grande, lorsque les lignes données font un angle droit; ainsi à moins que les angles ABD, ACD soient droits, ces triangles pourront être augmentés sans augmenter ni diminuer le reste de la figure. En effet, si l'angle ACD n'étoit pas droit, on pourroit augmenter le triangle ACD, en rendant droit l'angle ACD; ce qu'on pourroit faire, en faisant tourner le triangle BCA autour du point C; car ni ce triangle ni la surface CPD ne seroient par là diminués.

COROLLAIRE I. On démontreroit par un raisonnement semblable que la même chose a lieu, quelque nombre de lignes données Ab, bc, cf, fg, gB (fig. 57) qu'on eût; de sorte que la surface renfermée par cinq droites données & une sixiéme droite indéterminée, sera la plus grande possible, lorsque les droites seront inscrites dans un demi-cercle, dont l'indéterminée sera le diamètre. D'où il suit que l'espace $abfg$, qui est une des parties de la surface dont on vient de parler, sera la plus grande possible, lorsque les droites qui la renferment seront des cordes d'un cercle; autrement la surface $Abcfg$B pourroit être augmentée, puisqu'une de ses parties pourroit être augmentée, le reste de la figure restant le même.

COROLLAIRE II. Il suit du corollaire précédent que le plus grand espace que puisse renfermer un nombre quelconque des lignes données, est une figure inscrite dans un cercle; de sorte que si ces lignes sont en nombre infini & infiniment petites, chacune pourra être inscrite & regardée comme un arc infiniment petit, & leur somme comme la circonférence d'un cercle; c'est pourquoi le cercle est la plus grande des figures *isopérimètres* ou de même périmètre.

Parlons maintenant des *maxima* & des *minima* des fonctions algébriques. Lorſque la fonction algébrique ne renferme qu'une variable x, on peut la ſuppoſer égale à y, & différencier enſuite comme ſi l'on cherchoit la plus grande ou la moindre ordonnée d'une courbe.

81. PROBLÊME. *Trouver les cas dans leſquels la fonction* $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ *devient un* maximum *ou un* minimum. Suppoſant cette quantité $= y$, différenciant & faiſant $dy = 0$, l'on a $4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = dy = 0$, ou $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, dont les diviſeurs ſont $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$; donc les valeurs de x ſont $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Si à la place de $x = 1$ l'on ſubſtitue $1 + dx$ & enſuite $1 - dx$, on trouvera dans l'un & dans l'autre cas une valeur plus grande pour y qu'en ſubſtituant 1. Donc la premiere valeur de x indique un *minimum*; on trouvera que la ſeconde indique un *maximum* & la troiſiéme un *minimum*.

On peut voir dans cet exemple que les *maxima* & les *minima* ſe ſuccedent alternativement. En général ſi la courbe bm (fig. 58) a pluſieurs *maxima* & *minima* ab, an &c. de maniere qu'à l'abſciſſe Aa réponde un *minimum* ab, il eſt viſible que l'ordonnée ap ne peut devenir un *minimum*, à moins que la partie bnp ne ſe ſoit écartée de l'axe d'une quantité plus grande que l'ordonnée ab, qui eſt le premier *minimum*; donc il doit y avoir un *maximum* an entre les deux *minimum*. Il eſt donc aiſé de voir qu'un *minimum* ap ne peut être ſuivi d'un *minimum*, mais il peut être ſuivi d'un *maximum*. Si à l'abſciſſe $Aa = x$ répond un *maximum* ab (fig. 59), ce *maximum* ne peut être ſuivi que d'un *minimum*, & celui-ci ne peut être ſuivi que d'un *maximum*; de

maniere que les *maxima* & les *minima* (quand il y en a pluſieurs) ſe ſuivent alternativement. On peut auſſi appliquer la méthode des *maximis* & *minimis*, quoique l'expreſſion qu'on ſuppoſe $= y$ contienne des quantités tranſcendentes.

82. PROBLÈME. *Quel eſt le nombre qui, diviſé par ſon logarithme, donne un* minimum *pour quotient?* Soit x le nombre cherché, $\frac{x}{\text{L.}x}$ ſera un *minimum* & $\frac{\text{L.}x}{x}$ un *maximum*. Ainſi en faiſant $\frac{\text{L.}x}{x} = y$, l'on aura $\frac{dx}{xx} - \frac{dx\,\text{L.}x}{xx} = dy$, & ſuppoſant $dy = 0$, l'on a $\frac{1}{xx} - \frac{\text{L.}x}{xx} = 0$, $1 = \text{L.}x$; & parce qu'il s'agit ici des logarithmes hyperboliques, ſi l'on fait $= e$ le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, l'on aura $x = e$; donc $\frac{\text{L.}e}{e}$ ſera un *maximum*, & $\frac{e}{\text{L.}e}$ un *minimum*.

83. PROBLÈME *Trouver un nombre tel que* $(x)^{\frac{1}{x}}$ *ſoit un* maximum. Soit $(x)^{\frac{1}{x}} = y = x^{z}$, en faiſant $\frac{1}{x} = z$; donc $\text{L.}y = z\,\text{L.}x$, $\frac{dy}{y} = dz.\,\text{L.}x + z.\,\frac{dx}{x} = \frac{-dx\,\text{L.}x}{x^2} + \frac{dx}{xx}$ (en ſubſtituant $\frac{-dx}{xx}$ à la place de dz; car la différentielle de $\frac{1}{x} = \frac{-dx}{x^2}$); ainſi en faiſant $dy = 0$, diviſant par dx & tranſpoſant, l'on a $\frac{1}{xx} = \frac{\text{L.}x}{xx}$, $\text{L.}x = 1$, ou $\text{L.}e = 1$, ou $x = e$; donc $(e)^{\frac{1}{e}}$ eſt un *maximum*. Si on ſuppoſe $x = 1$, l'on a $x^{\frac{1}{x}} = (1)^{\frac{1}{1}} = 1.000000$. Si l'on ſuppoſe $x = 2$, l'on a $(x)^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414213$. Si $x = 3$, l'on a $(3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} = 1.442250$. Si $x = 4$,

l'on a $(x)^{\frac{1}{x}} = 1.41421\,3$ (*); ce qui fait voir que $(e)^{\frac{1}{e}}$ est un *maximum* & non un *minimum*. Ainsi dans la courbe dont l'équation seroit $y = x^{\frac{1}{x}}$, l'ordonnée correspondante à l'abscisse $x = e$ seroit un *maximum*.

84. PROBLÈME. *Quel est l'arc x dont le sinus est un* maximum ? Soit $y = \sin. x$, l'on aura $dy = dx \cos. x$, & supposant $dy = 0$, il vient $\cos. x = 0$. Or le cosinus de 90° est $= 0$; donc l'arc cherché est de 90°, & son sinus est égal au rayon que nous supposons $= 1$.

La méthode que nous venons de donner a cet inconvenient, qu'il est pénible de s'assurer dans plusieurs cas de l'existence du *maximum* ou du *minimum*, & de distinguer l'un de l'autre, il ne sera donc pas inutile d'expliquer en peu de mots une autre méthode, qui est celle de M. Euler. Cette méthode suppose que l'on regarde les quantités négatives comme plus petites que 0; de sorte que selon cet Auteur, la quantité -2 est plus petite que -1, & plus grande que -3.

Ainsi quand on parlera d'un *maximum* négatif -5, par exemple cela doit s'entendre de maniere que -5 soit une quantité plus grande que $-5\frac{1}{2}$ par exemple, & plus petite que $-4\frac{3}{4}$. S'il s'agit d'une fraction $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$; en supposant $dy = 0$, l'on aura $P = 0$; de sorte que si $P = xx - aa$, il viendra $x^2 - aa = 0$, $x^2 = aa$, $x = a$, & $x = -a$. Les valeurs de x, qui peuvent donner le *maximum* ou le *minimum*, dépendront donc de l'équation $P = 0$; mais si $Q = 0$, la fraction $\frac{P}{Q}$ peut devenir infinie. Dans ce

(*) Les trois dernieres valeurs de x ne sont qu'approchées.

cas

cas, on pourra égaler Q à 0, & voir, en ſuivant notre méthode, ſi les valeurs de x qui en réſulteront donnent un *maximum* ou un *minimum*, ou ſi elles ne donnent ni l'un ni l'autre.

Mais dans le ſyſtême de M. Euler, la fraction $\frac{P}{Q}$ ne peut devenir un *maximum* qu'en ſuppoſant que dans le même cas $\frac{Q}{P}$ devienne un *minimum* $= 0$. Or en donnant à Q une valeur négative, cette derniere fraction devient une quantité négative, qui, ſelon lui, eſt plus petite que 0; donc cette fraction n'eſt pas (en admettant les principes de cet Auteur) un *minimum* dans la ſuppoſition de $Q = 0$; & par conſéquent $\frac{P}{Q}$ n'eſt pas un *maximum* dans le même cas. D'ailleurs ne s'enſuivroit-il pas de-là que la fraction $\frac{P}{Q}$ doit être plus qu'infinie lorſque Q eſt négatif; puiſque dans le même cas $\frac{Q}{P}$ ſera une quantité plus qu'infiniment petite? Or il paroît abſurde d'admettre un tel principe (*); car alors, en diviſant 6 ſucceſſivement par les termes $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ de la progreſſion arithmétique $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$, & conſidérant 0 comme une quantité infiniment petite, l'on auroit les quotiens $2, 3, 6, \infty, -6, -3, -2$. Or -6 réſulte de $\frac{6}{-1}$, & ſi l'on prétend que -1 eſt plus petit que 0, le quotient de 6 par -1

(*) Voyez dans notre Algébre dans quel ſens on peut dire qu'une quantité négative eſt plus petite que 0.

ſera plus grand que celui de 6 par o (on peut conſidérer o comme une quantité infiniment petite) ou ſera $> \infty$; donc l'on auroit $-6 > \infty$: ce que l'on ne ſauroit admettre. Ce que l'on vient de dire peut mettre nos Lecteurs en état de profiter de ce qu'il y a d'utile dans la méthode de M. Euler, que nous allons développer. Mais auparavant, nous devons établir les principes ſur leſquels elle eſt fondée.

Soit y une fonction quelconque de x, qui, en écrivant $x+dx$ au lieu de x, devienne $y+dy$; ſi dans la valeur de $y+dy$, on écrit encore $x+dx$ à la place de x, y deviendra $y+dy$, dy devenant ddy, & la fonction y deviendra $y+2dy+ddy$; ſi on ſubſtitue encore $x+dx$ au lieu de x, y deviendra $y+dy$, $2dy$ deviendra $2ddy$, & ddy deviendra $dddy$. Or cela revient au même, que ſi on eût d'abord ſubſtitué $x+3dx$ au lieu de x, ou ſi l'on eût différencié trois fois, en ſuppoſant dx conſtant & conſervant tous les termes. Suppoſons $y = x^3$, l'on aura d'abord $y+dy = (x+dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$. Subſtituant encore $x+dx$ au lieu de x, l'on a $y+dy+dy+ddy$, ou $y+2ydy+ddy = (x+2dx)^3 = (x+dx)^3 + 3(x+dx)^2dx + 3(x+dx)dx^2 + dx^3$, en ſuppoſant dx conſtant, & ainſi de ſuite; de ſorte que les valeurs qui répondent aux augmentations de x, ſont telles qu'on les voit ici.

x	y
$x+dx$	$y+dy$
$x+2dx$	$y+2dy+ddy$
$x+3dx$	$y+3dy+3ddy+dddy$
$x+4dx$	$y+4dy+6ddy+4dddy+ddddy$
&c.	&c.

Il eſt aiſé de voir que les co-efficiens des termes qui renferment quelques fonctions de y, ſont les

mêmes que les coefficiens du binome de Newton: par exemple, les coefficiens des termes de la quantité qui répond à $x + 3dx$ ſont 1, + 3, + 3, + 1. En général à $x + mdx$ répond la quantité $y + mdy + \frac{m.(m-1).ddy}{1.2.} +$ $\frac{m.(m-1).(m-2)d^3y}{1.2.3} +$ &c. Si on ſuppoſe que m repréſente un nombre infiniment grand, comme le produit d'une quantité infinie par une quantité infiniment petite dy peut être fini, mdy pourra repréſenter dans ce cas une quantité finie; & parce qu'alors la quantité $m - 1$ eſt cenſée $= m$, le troiſiéme terme ſera $\frac{m.mddy}{2}$, dans lequel il y a deux facteurs m, m infiniment grands; & quoique le facteur ddy ſoit infiniment plus petit que dy, cependant ce terme pourra être fini. Le troiſiéme terme ſera dans ce cas $= \frac{m^3 d^3y}{6}$, qui ſera fini, quoique d^3y ſoit infiniment petit du troiſiéme ordre, & ainſi de ſuite. Donc dans ce cas, en appellant p ce que devient la fonction y de x lorſque x ſe change en $x + mdx$, l'on aura l'équation $p = y + \frac{m.dy}{1} + \frac{m^2 ddy}{1.2} + \frac{m^3 d^3y}{1.2.3}$ $+ \frac{m^4 d^4y}{1.2.3.4} +$ &c. ... (A). Maintenant ſi on fait $mdx = f$ quantité finie, en ſuppoſant m un nombre infiniment grand, l'on aura $m = \frac{f}{dx}$, quantité infiniment grande à cauſe du diviſeur infiniment petit. Subſtituant cette valeur de m dans la formule A, l'on aura l'équation p

$= y + \frac{f\,dy}{dx} + \frac{f^2\,ddy}{1.2.dx^2} + \frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{f^4\,d^4y}{1.2.3.4.dx^4}$ &c. Si f étoit une quantité négative, à $x - m\,dx$ répondroit $p = y - \frac{f\,dy}{1.dx} + \frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2} - \frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3}$ + &c.

85. Avant de faire l'application de ces formules aux questions des *maximis* & *minimis*, nous ferons remarquer qu'on peut en faire usage pour trouver ce que devient une fonction de x, lorsque x est augmentée d'une quantité finie quelconque. Qu'on demande par exemple la valeur de la fonction $xx - x$, en supposant qu'on substitue $x+1$ au lieu de x, je fais $y = xx - x$, $f = 1$; prenant les différences, j'ai $\frac{dy}{dx} = 2.x - 1$. Différenciant les deux membres de cette équation en supposant dx constant, il vient $\frac{ddy}{dx} = 2\,dx$, $\frac{ddy}{dx^2} = 2$. Différenciant les deux membres de cette derniere équation, & faisant attention que la différence de la quantité constante 2 est $= 0$, l'on a $\frac{ddd\,y}{dx^2} = 0$, & par conséquent $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; ainsi la serie est terminée au troisiéme terme, & l'on a $y + \frac{f\,dy}{dx} + \frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2} = xx - x + (2x-1) + \frac{1.2}{1} = xx + x$.

On demande maintenant quelle sera la valeur de $y = xx + 3x + 1$, si l'on substitue $x - 3$

au lieu de x. Je fais $-3 = -f$; & en différenciant, je trouve $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$. C'eſt pourquoi l'opération finit ici, parce que la différentielle de 2 eſt $= 0$; donc $y - \frac{f\,dy}{dx} + \frac{f^2\,d\,dy}{1.2.dx^2} = x^2 + 3x + 1 - 3.(2x+3) + \frac{9.2}{2} = xx - 3x + 1$.

REMARQUE. Si y eſt ſuppoſé $= x^3$, l'on aura $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, $\frac{d\,dy}{dx^2} = 6x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$; & par conſéquent $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$. De ſorte qu'en général pour parvenir au terme conſtant dont la différentielle doit être $= 0$, il ne faut faire qu'autant de différenciations qu'il y a d'unités dans l'expoſant de x, en ſuppoſant qu'il n'y a qu'un terme dans la fonction de x; s'il y a pluſieurs termes, comme ſi on avoit, par exemple, $y = x^{10} + 5x^3 + 2$, l'on ne ſera obligé de faire que dix différenciations, c'eſt-à-dire, autant qu'il y a d'unités dans le plus grand expoſant de x.

Faiſons maintenant l'application de nos formules aux *fonctions uniformes* de x; c'eſt-à-dire, aux fonctions qui, pour chaque valeur différente de x, reçoivent une valeur différente. Mais les *fonctions multiformes* de x reçoivent deux ou pluſieurs valeurs différentes pour chaque valeur de x: telle eſt par exemple la quantité $y = \pm\sqrt{(a + x^3 + 2x^4 + \sqrt[3]{x})}$.

Selon ce que nous avons dit ci-deſſus, ſi à la

place de x l'on ſubſtitue $x+f$ & enſuite $x-f$, y deviendra

$$y+\frac{f\,dy}{dx}+\frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2}+\frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3}+\text{&c. (B).}$$

$$y-\frac{f\,dy}{dx}+\frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2}-\frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3}\ \text{&c. (R).}$$

Il eſt néceſſaire que dans le cas du *maximum*, l'on ait $y>y+\frac{f\,dy}{dy}+\frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2}$ &c., &

$$y>y-\frac{f\,dy}{dx}+\frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2}\ \text{&c.}$$

Mais dans le cas du *minimum*, l'on doit avoir

$$y<y+\frac{f\,dy}{dx}+\text{&c., &}$$

$$y<y-\frac{f\,dy}{dx}+\text{&c.}$$

cela doit arriver, en ſuppoſant que f repréſente une quantité fort petite, puiſque, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus, en augmentant ou en diminuant x d'une très-petite quantité, y doit devenir plus petit dans le cas du *maximum* & plus grand dans le cas du *minimum*. Suppoſons f ſi petite qu'on puiſſe négliger ſes puiſſances ſupérieures, dans ce cas tous les termes qui ſuivent $\frac{f\,dy}{dx}$ diſparoîtront; & parce que dans le cas du *maximum* ou du *minimum* on a $dy=0$, l'on aura $\frac{f\,dy}{dx}=0$ & $\frac{dy}{dx}=0$ (*). Mais la valeur de y, que cette

(*) Dans notre méthode, on peut auſſi ſuppoſer $\frac{dy}{dx}=\infty$

équation peut faire trouver, n'eſt pas toujours un *maximum* ou un *minimum*, comme on l'a vu ci-deſſus. Soit c la valeur ou une des valeurs de x que donne l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$; qu'on ſubſtitue cette valeur dans les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c. & que par cette ſubſtitution l'on ait $\frac{d\,dy}{dx^2} = p$, $\frac{d^3y}{dx^3} = q$, $\frac{d^4y}{dx^4} = r$, $\frac{d^5y}{dx^5} = s$, &c.

Suppoſons encore que la quantité y devienne $= F$, en ſubſtituant c à la place de x; ſi à la place de x on ſubſtitue $c + f$ (*) & enſuite $c - f$, les formules ci-deſſus B & R deviendront

$$F + \frac{f^2 p}{1.2} + \frac{1}{6} f^3 q + \frac{1}{24} f^4 r + \text{&c.}$$

$$F + \frac{1}{2} f^2 p - \frac{1}{6} f^3 q + \frac{1}{24} f^4 r - \text{&c.}$$

(en faiſant attention que le ſecond terme des formules citées, eſt ſuppoſé $= 0$, à cauſe de $\frac{dy}{dx} = 0$).

Il ſuit de-là que ſi p eſt une quantité poſitive, l'une & l'autre valeur de y ſera plus grande que F, & qu'ainſi la valeur qu'on trouve pour y, en ſuppoſant $x = c$, ſera un *minimum*. Si p eſt une quantité négative, l'une & l'autre valeur ſera plus petite que F, & y ſera un *maximum*. Si dans la ſuppoſition de $x = c$, p eſt $= 0$, on doit alors examiner ſi $q = 0$. Si cela n'arrive pas, la valeur

(*) f eſt ſuppoſée ici une quantité très-petite.

de y ne ſera ni un *maximum* ni un *minimum*; car en ſuppoſant $x = c + f$, l'on aura $F + \frac{1}{6} f^3 q > F$; & ſuppoſant $x = c - f$, l'on a $F - \frac{1}{6} f^3 q < F$. Mais ſi $q = 0$, on examinera ſi r eſt une quantité poſitive ou négative : dans le premier cas y ſera un *minimum* & un *maximum* dans le ſecond cas. Si $r = 0$, on aura recours à s. Si s n'eſt pas $= 0$, la fonction y ne ſera ni un *maximum* ni un *minimum*. Si $s = 0$, on examinera ſi t eſt poſitif ou négatif: Dans le premier cas y ſera un *minimum*, & dans le ſecond cas un *maximum*.

En général, ſi la différentielle $\frac{d^m y}{dx^m}$ (m étant un nombre impair) ne s'évanouit pas, l'on n'a ni *maximum* ni *minimum*. Si la derniere différentielle $\frac{d^m y}{dx^m}$, qui ne s'évanouit pas, eſt d'un ordre pair, ou ſi m eſt un nombre pair, l'on a un *minimum* ſi cette quantité eſt poſitive, & un *maximum*, ſi elle eſt négative. Or il faut faire le même examen pour chaque valeur de x, que donne l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$. Si l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$ a deux racines égales de maniere qu'elle ait un facteur quarré $(x - c)^2 = 0$, alors en ſuppoſant $x = c$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ s'évanouira, parce que cette quantité renferme néceſſairement la quantité $x - c$, qui devient dans ce cas $c - c = 0$; donc alors on a $p = 0$, mais non pas $q = 0$. Si l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$ a trois racines égales ou ſi $\frac{dy}{dx}$ a un facteur cube $(x - c)^3$, alors en ſubſtituant c à la place de x, l'on aura

$\frac{ddy}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; mais $\frac{d^4y}{dx^4}$ ne sera pas $= 0$. Dans ce cas, l'on aura un *minimum* ou un *maximum*, selon que cette quantité sera positive ou négative. En général, si $\frac{dy}{dx}$ a un facteur $(x - c)^n$, l'on aura un *minimum* ou un *maximum*, si n est un nombre impair; mais on n'aura ni l'un ni l'autre, si n est un nombre pair.

86. PROBLÊME. *Déterminer les cas dans lesquels* $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ *devient un* maximum *ou un* minimum. Supposant cette quantité $= y$, l'on aura $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15xx$. Supposant $\frac{dy}{dx} = 0$, il vient $5x^4 - 20x^3 + 15xx = 0$, ou $x^4 - 4x^3 + 3xx = 0$. Cette équation étant divisible par $xx = 0$, donne $x = 0$ & $x = 0$, & de plus $x^2 - 4x + 3 = 0$ ou $(x - 1) \times (x - 3) = 0$ ou $x = 1$ & $x = 3$. Parce que la premiere & la seconde racines sont égales, elles ne donneront ni *maximum* ni *minimum*; car l'équation $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15xx$, donne $\frac{ddy}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 + 30x$ (A), qui devient $= 0$, dans la supposition de $x = 0$; Ainsi $\frac{ddy}{dx^2}$ s'évanouit dans ce cas. Mais l'on a $\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 - 120x + 30$, qui, dans la supposition de $x = 0$, ne s'évanouit pas; ainsi, dans cette supposition, q n'est pas $= 0$; donc les racines égales $x = 0$, $x = 0$, ne donnent ni

maximum ni *minimum*. La troiſiéme racine $x = 1$ donne (en ſubſtituant 1 au lieu de x, dans l'équation A) $\frac{d\,dy}{dx^2} = 20 - 60 + 30 = -10$. Donc p eſt dans ce cas une quantité négative, & y un *maximum*. La quatriéme racine donne $x = 3$. Subſtituant cette valeur de x dans l'équation A, il vient $\frac{d\,dy}{dx^2} = 90$; donc dans ce cas (p étant une quantité poſitive) y eſt un *minimum*.

87. PROBLÊME. *Dans quels cas* $y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$ *devient* maximum *ou* minimum? L'on aura $\frac{dy}{dx} = 60x^5 - 60x^4 + 60x^3 - 60xx$, $\frac{d\,dy}{60.\,dx^2} = 5x^4 - 4x + 3xx - 2x$ (P). Suppoſant $\frac{dy}{dx} = 0 = 60 \times (x^5 - x^4 + x^3 - xx)$, il vient 0. Diviſant cette derniere équation par 60 & réſolvant le ſecond membre en facteurs, l'on a $xx(x-1) \times (xx+1) = 0$. Le facteur xx donne deux racines égales à 0; donc pour le cas de $x = 0$, il n'y a ni *maximum* ni *minimum*. Le ſecond facteur donne $x = 1$. Subſtituant cette valeur de x dans l'équation P, il vient $\frac{d\,dy}{60.\,dx^2} = 2$, ou $\frac{d\,dy}{dx^2} = 120$; donc p eſt une quantité poſitive, & en ſubſtituant 1 à la place de x, y ſera un *minimum*. Le facteur $xx+1$ donne $xx = -1$ & $x = \pm\sqrt{-1}$; donc les deux racines de ce facteur ſont imaginaires, & dans ce cas il n'y a ni *maximum* ni *minimum*.

En général, on voit que ſi l'équation eſt du

degré n, la détermination des *maxima* & *minima* dépend de l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$, qui eſt du degré $n - 1$. De ſorte que ſi l'on a $y = x^n + Bx^{n-1}$ + &c. l'on aura l'équation $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + B.(n-1)x^{n-2}$ &c. $= 0$. Si a, b, c, g, &c. ſont les racines de l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$, de maniere que l'on ait a plus grand que b, b plus grand que c, & ainſi de ſuite, la ſubſtitution de a à la place de x donnera un *minimum*, b donnera un *maximum*, & ainſi de ſuite alternativement. Car, en ſuppoſant $x = \infty$, l'on aura y infini; & puiſque les valeurs de x entre ∞ & a ne produiſent ni *maximum* ni *minimum*, il eſt viſible que y décroît, tandis qu'au lieu de x, on ſubſtitue des valeurs depuis ∞, juſques à a; donc la racine a produit un *minimum*. En faiſant x plus petit que a, y doit croître juſqu'à ce que $x = b$, & alors y ſera un *maximum*. Mais y redeviendra *minimum* lorſqu'on aura $x = c$, & ainſi de ſuite; de ſorte que les *maxima* & les *minima* ſe ſuccedent alternativement. Si l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$ a deux racines égales, elles ne donneront ni *maximum* ni *minimum*. Il en ſera de même pour un nombre pair quelconque des racines égales; mais s'il y a trois racines inégales, on les conſidérera comme une ſeule racine qui donnera un *maximum* ou un *minimum*. En général, un nombre impair quelconque de racines égales ne donnera qu'un ſeul *maximum* ou *minimum*.

S'il s'agit des fonctions fractionaires rationelles, de maniere que l'on ait $y = \frac{P}{Q}$, P & Q étant des fonc-

tions rationelles de x, l'on aura $dy = \frac{Q\,dP - P\,dQ}{QQ}$ & $\frac{dy}{dx} = \frac{Q\,dP - P\,dQ}{QQ\,dx}$. Dans notre méthode, on pourroit ſuppoſer ſouvent $\frac{dy}{dx} = \infty$, & alors on auroit $QQ\,dx = 0$ ou $Q = 0$, & l'on examineroit ſi les racines de cette équation donnent un *maximum* ou un *minimum*. Mais dans la méthode de M. Euler, on ſuppoſera toujours $dy = 0$ & $Q\,dP - P\,dQ = 0$, & les racines de cette équation rendront y un *maximum* ou un *minimum*.

88. PROBLÊME. *Dans quels cas* $y = \frac{x}{1+xx}$ (*) *devient un* maximum *ou un* minimum? L'on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xx}{(1+xx)^2}$ (A), $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-6x+2x^3}{(1+xx)^3}$ (B). Suppoſant le numérateur de la fraction A égal à 0, il vient $1 - xx = 0$, $1 = xx$, $x = \pm\sqrt{1}$; donc $x = 1$ & $x = -1$. La premiere valeur de x étant ſubſtituée dans l'équation B, donne $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$; donc dans ce cas $y = \frac{1}{2}$ eſt un *maximum*. La ſeconde valeur de $x = -1$ donne $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{4}{8}$; donc, dans ce cas, $y = -\frac{1}{2}$ eſt un *minimum*.

(*) Si on ſuppoſe que y eſt l'ordonnée d'une courbe dans laquelle 1 déſigne une ligne qu'on regarde comme l'unité, on aura les *maxima* ou les *minima* d'ordonnées.

REMLAQUE. Lorſque y devient un *maximum*, $\frac{1}{y}$ doit devenir un *minimum*, & réciproquement, lorſque y eſt un *minimum*, $\frac{1}{y}$ eſt un *maximum*.

89. PROBLÊME. *Dans quels cas* $y = \frac{2-3x+xx}{2+3x+xx}$ *devient un* maximum *ou un* minimum? L'on a $\frac{dy}{dx} = \frac{6xx-12}{(2+3x+xx)^2}$ (A). $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-12x^3+72x+72}{(2+3x+xx)^3}$ (B). Si on ſuppoſe $\frac{dy}{dx} = 0$, l'équation A donne $6xx - 12 = 0$, $6xx = 12$, $xx = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$, ou $x = +\sqrt{2}$, & $x = -\sqrt{2}$. Subſtituant la premiere valeur de x dans l'équation B, il vient $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{48\sqrt{2}+72}{(3\sqrt{2}+4)^3}$, quantité poſitive; donc cette valeur de x rend y *minimum*. La ſeconde valeur de x donne $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-48\sqrt{2}+72}{(-3\sqrt{2}+4)^3} = \frac{24(3-2\sqrt{2})}{(4-3\sqrt{2})^3}$ quantité négative, parce que le dénominateur eſt négatif & le numérateur eſt poſitif; car $3\sqrt{2} > 4$.

Si on ſuppoſe $x = \frac{4}{3}$ (*), l'on a $y = -\frac{2}{70} = -0.0285$.

Si $x = \sqrt{2}$ l'on a $y = 12\sqrt{2} - 17 = -0.0294$ *minimum*.

Si $x = \frac{1}{2}$ l'on a $y = \frac{-1}{35} = -0.0285$.

Si $x = -\frac{4}{3}$, l'on a $y = -35$.

Si $x = -\sqrt{2}$, l'on a $y = -33.9711$ *maximum*.

Si $x = -\frac{3}{2}$, l'on a $y = -35$.

(*) Les valeurs des radicaux ne ſont qu'approchées.

Car pour le *minimum*, l'on a $y = \frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$ $= 12\sqrt{2} - 17$, & pour le *maximum*, l'on a $y = \frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = -12\sqrt{2} - 17$, & ſuppoſant pour les valeurs de $\sqrt{2}$, $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{2}$, l'on aura les valeurs de y, qu'on vient de ſuppoſer.

L'on peut remarquer ici que la valeur du *maximum* eſt plus petite que celle du *minimum*; mais cela n'aura pas lieu, en conſidérant les quantités négatives comme ſi elles étoient poſitives.

REMARQUE I. Si l'on avoit $y = x^{\frac{2}{3}}$, l'on auroit $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$ & les différentielles $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ &c. ne deviendroient jamais égales à 0. De plus, l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0$, eſt impoſſible, à moins qu'on ne ſuppoſe $x = \infty$; car 2 n'eſt pas $= 0$. Dans ce cas, ſi on ſuppoſe $x = 0$, les termes $\frac{fdy}{dx}$, $\frac{f^2ddy}{dx^2}$, &c. deviennent infinis, & la ſerie eſt divergente. Dans ce même cas, on peut chercher le *maximum* ou le *minimum* de x^2; car toutes les fois que x^2 deviendra un *maximum* ou un *minimum*, $x^{\frac{2}{3}}$ deviendra auſſi un *maximum* ou un *minimum*. De même, ſi on a $x^{\frac{4}{3}} = y$, on pourra chercher le *maximum* de x^4 & les valeurs de x, qui rendront x^4 *maximum* ou *minimum*, rendront auſſi y *maximum* ou *minimum*, &c. De même $(xx - 3x + 2)^{\frac{2}{3}}$ deviendra un *maximum*

ou un *minimum*, dans le même cas que $(xx-3x+2)^2$.

De même $(x^2-5x+3)^{\frac{m}{n}}$, m étant un nombre pair & n un nombre impair, deviendra un *maximum* ou *minimum*, dans le même cas que $(xx-5x+3)^m$. Il ſuffit donc de pouvoir trouver les *maxima* & les *minima*, lorſque l'expoſant de la fonction de x eſt un nombre pair.

REMARQUE II. Si y eſt un *maximum* ou un *minimum* poſitif, $\sqrt{y}$ ſera auſſi un *maximum* ou un *minimum*; mais ſi y eſt un *maximum* ou un *minimum* négatif, $\sqrt{y}$ ſera imaginaire.

Si y eſt un *minimum* négatif, y^2 ſera un *maximum*, parce qu'alors les valeurs de y^2 qu'on trouvera en augmentant ou en diminuant x d'une très-petite quantité, ſeront plus petites que la valeur de y^2, que donne le *minimum* négatif; mais ſi y eſt un *maximum* négatif, y^2 ſera un *minimum*.

90. PROBLÊME. *Dans quels cas la fonction* $(xx-3x+7)^{\frac{2}{3}}$ *devient* maximum *ou* minimum? Je cherche dans quels cas $(xx-3x+7)^2=y$ devient un *maximum* ou un *minimum*. En différenciant, je trouve $\frac{dy}{dx}=2.(2x-3)\times(xx-3x+7)$ (A), $\frac{ddy}{dx^2}=4.(xx-3x+7)+4.(2x-3).(2x-3)$.

En ſuppoſant les deux membres de l'équation A égaux à $=0$, l'on a $2x-3=0$, ou $x=\frac{3}{2}$; on a encore $x^2-3x+7=0$, ou $x^2-3x=-7$, ou $x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}-7=\frac{9}{4}-\frac{28}{4}=\frac{-19}{4}$, $x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{-19}{4}\right)}$, ou $x=\frac{3\pm\sqrt{(-19)}}{2}$; de

ſorte que les deux racines ſont imaginaires & ne donnent ni *maximum* ni *minimum*. Si on ſubſtitue la valeur $\frac{3}{2}$ de x que donne le facteur $2x-3=0$, l'on a $\frac{ddy}{dx^2}=+19$; donc la quantité propoſée devient un *minimum* dans ce cas.

REMARQUE. On auroit pu ſe contenter de chercher dans quel cas x^2-3x+7 devient un *maximum* ou un *minimum*; car on auroit trouvé que la valeur de $x=\frac{3}{2}$ donne un *minimum* pour cette quantité, & par conſéquent ſon quarré, que je repréſente par y^2 & ſa puiſſance $y^{\frac{2}{3}}$, doivent auſſi être des *minima*; mais ſi le *minimum* avoit été négatif, y^2 ſeroit un *maximum*, auſſi bien que $y^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{y^2}$, ce qui eſt évident.

91. PROBLÊME. *Dans quels cas* $y=(aa+xx)^{\frac{1}{2}}-x$ *devient* maximum *ou* minimum? L'on aura $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}-1$, équation que je déſignerai par (A), $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{aa}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$. Supposant $\frac{dy}{dx}=0$, l'équation A donne $x=\sqrt{(aa+xx)}$, $x^2=aa+xx$. Selon M. Euler, en ſuppoſant $x=\pm\infty$, on a $x^2=aa+xx$, & dans ce cas $\frac{ddy}{dx^2}$ eſt $=0$. De même $\frac{d^3y}{dx^3}=0$; &c. ce qui vient, ſi l'on en croit cet Auteur, de ce qu'on a $x=-\infty$, auſſi bien que $x=+\infty$. Mais dans la ſuppoſition de $x=\infty$, aa diſparoiſſant devant xx, l'on a $\sqrt{(xx+aa)}-x=0$; ainſi

ainſi y a la plus petite valeur poſſible, dans la ſuppoſition de $x = \infty$. Si l'on ne vouloit pas que aa s'évanouît dans ce cas, l'on auroit $xx + da = xx$ & $aa = 0$, ce qui eſt abſurde. Donc y n'auroit ni *maximum* ni *minimum*; & de plus, parce qu'on ne peut pas ſuppoſer x plus grand que ∞, on ne peut avoir ni *maximum* ni *minimum*, dans le ſens que nous avons donné à ces termes.

92. PROBLÊME. *Dans quels cas* $y = \sqrt{(aa + 2bx + mxx)} - nx$ *devient* maximum *ou* minimum? On aura $\frac{dy}{dx} = \frac{b + mx}{\sqrt{(aa + 2bx + mxx)}} - n$; donc en ſuppoſant $dy = 0$, l'on a $(b + mx)^2 = n^2(aa + 2bx + mxx)$, d'où l'on tire par les régles ordinaires de l'Algébre, $x = \frac{(nn - m).b \pm \sqrt{[(mnn).(m - nn)\,aa - nn.(m - nn).bb]}}{m.(m - nn)}$, ou $x = -\frac{b}{m} + \frac{n}{m}\sqrt{\left(\frac{maa - bb}{m - nn}\right)}$; donc l'on a $\sqrt{(a^2 + 2bx + mxx)} = \frac{b + mx}{n} = \pm\sqrt{\left(\frac{maa - bb}{m - nn}\right)}$; donc puiſque $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa - bb}{(aa + 2bx + mxx)^{\frac{3}{2}}}$, l'on aura $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa - bb}{\pm\left(\frac{maa - bb}{m - nn}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Si la quantité $\left(\frac{maa - bb}{m - nn}\right)$ n'eſt pas poſitive, ſa puiſſance $\frac{3}{2}$ ou la racine quarrée de ſon cube ſera imaginaire, & l'on n'aura ni *maximum* ni *minimum*. Si cette quantité eſt poſitive & $m > nn$, le ſigne ſupérieur donnera un *minimum*; mais il donnera un *maximum*, ſi $m < nn$; parce qu'alors le numérateur $maa - bb$ ſera une quantité négative, qui, étant di-

viſée par une quantité poſitive, donne un quotient négatif pour la valeur de $\frac{ddy}{dx^2}$. Le contraire arrivera pour le ſigne inférieur, c'eſt-à-dire, pour le ſigne —. Si on ſuppoſe $m=2, n=1$, & $b=0$, y devient un *minimum*, en ſubſtituant pour x la quantité $+\frac{1}{2}\sqrt{2aa} = \sqrt{\frac{2aa}{4}} = \sqrt{\frac{4aa}{8}} = \frac{\sqrt{4aa}}{2\sqrt{2}} = \frac{2a}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$; mais y devient un *maximum*, en mettant $-\frac{1}{2}\sqrt{aa} = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ à la place de x; donc le *minimum* ſera $= a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, & le *maximum* ſera $= a\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$.

Lorſqu'on a une équation qui renferme x & y mêlés enſemble, on doit différencier l'équation & ſuppoſer le co-efficient de dx (que nous déſignerons par P) $= 0$, & par ce moyen on trouvera une valeur de y, qui étant ſubſtituée dans l'équation, pourra faire connoître les valeurs de x, qui rendent y *maximum* ou *minimum*. Soit $y^3 - 3axy + x^3 = 0$; donc $3yy\,dy - 3ay\,dx - 3ax\,dy + 3xx\,dx = 0$. Egalant P à 0, il vient $3xx - 3ay = 0$, $xx = ay$, $y = \frac{xx}{a}$; ſubſtituant cette valeur de y dans l'équation propoſée, l'on a $\frac{x^6}{a^3} - 3x^3 + x^3 = 0$, ou $\frac{x^6}{a^3} - 2x^3 = 0$, ou $x^6 = 2a^3x^3$, ou $x^3 = 2a^3$; & partant $x = a\sqrt[3]{2}$. Maintenant ſoit

$= Q$ le multiplicateur de dy, l'on aura $P\,dx + Q\,dy = 0$; différenciant P & Q, il vient $dP = R\,dx + S\,dy$ (*) & $dQ = T\,dx + V\,dy$. Donc $d.(P\,dx + Q\,dy)$, en regardant dx comme conſtant, ſera $= R\,dx^2 + S\,dx\,dy + T\,dx\,dy + V\,dy^2 + Q\,ddy = 0$, & parce que l'on ſuppoſe $\frac{dy}{dx} = 0$, en diviſant l'équation par dx^2 & effaçant les termes qui contiennent dy ou dy^2, il vient $R + \frac{Q\,ddy}{dx^2} = 0$, ou $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-R}{Q}$; donc dans l'équation différentielle $P\,dx + Q\,dy = 0$, il ſuffit de différencier P en ſuppoſant dy conſtant, pour avoir $R\,dx$. On cherchera enſuite la valeur de $\frac{R}{Q}$, qui indiquera un *maximum* ou un *minimum*, ſelon qu'elle ſera poſitive ou négative; car ſi elle eſt négative, $\frac{-R}{Q} = \frac{ddy}{x^2}$ ſera poſitif. Dans le cas propoſé l'on a $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax} = 0$; donc $ay - xx = 0$; donc (en différenciant & faiſant attention que $ay - xx = 0$), l'on aura $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{yy - ax}$. Mais l'équation $ay - xx = 0$, donnant $y = \frac{xx}{a}$ $= a\sqrt[3]{4}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-R}{Q}$ ſera $= -\frac{2}{a}$, quantité négative qui fait voir que la fonction y eſt un *maximum*, lorſque l'on a $x = a\sqrt[13]{2}$.

L'équation $x^6 = 2a^3x^3$ donne $x^3 = 0$, ou $x = 0$,

(*) S déſigne ici le co-efficient de dy & non une intégrale.

$x = 0$, $x = 0$; & alors $yy - ax = 0$, à cauſe de $y = \frac{xx}{a}$. Suppoſons $y = p$ & $x = f$, f étant une quantité très-petite dont la puiſſance 3e diſparoît devant pf, l'on aura $p^3 = 3apf$, $p^2 = 3af$ & $p = \pm \sqrt{3af}$; donc quoique l'on ne puiſſe pas prendre f négativement, parce que p ſeroit imaginaire, cependant des deux valeurs de y, l'une ſera plus grande & l'autre plus petite que 0. Si l'on fait $p = bf^2$, pour avoir $f^3 = 3abf^3$, $b = \frac{1}{3a}$, & $p = \frac{f^2}{3a}$, quelque ſigne qu'on donne à f, la valeur de y ſera plus grande que 0. Ainſi dans ce cas la valeur de $y = 0$ ſera un *minimum*.

Si dans ces ſortes de cas l'équation, qui doit donner la valeur de x, a pluſieurs racines réelles, on fera pour chacune ce qu'on vient de faire pour la valeur de $x = a\sqrt[3]{2}$, & ſi l'on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \frac{P}{Q}$, ce ſera une marque que pluſieurs branches de la courbe repréſentée par l'équation ſe rencontrent au même point. On comprendra cela facilement, ſi l'on ſe rappelle ce qu'on a dit ci-deſſus par rapport à la fraction $\frac{0}{0}$.

93. Nous allons parler maintenant d'une autre eſpéce de *maximum* & de *minimum*, qu'on ne peut trouver par la méthode qu'on vient d'expliquer. Suppoſons qu'on ait l'équation $y = p \pm (c - x) \times \sqrt{(c - x)}$. q, p & q étant des fonctions de x non diviſibles par $c - x$, & que q ait une valeur poſitive en ſubſtituant c ou une quantité plus grande ou plus petite que c au lieu de x, ſuppoſant de plus que x étant $= c$, l'on ait $p = g$;

il eſt viſible que dans le cas de $x = c$ (*), les deux valeurs de y ſont toutes les deux égales à g. Si on ſuppoſe $x > c$, les deux valeurs de y ſeront imaginaires; mais en ſuppoſant x un peu plus petit que c, ou en ſuppoſant $x = c - f$, f étant une quantité poſitive très-petite, p deviendra $= g - \frac{f\,dp}{dx} + \frac{f^2\,ddp}{2\,dx^2}$ — &c. (**), & q ſe changera en $q - \frac{f\,dq}{dx} + \frac{f^2\,d^2q}{2\,dx^2}$ — &c. donc à cauſe de $x = c - f$, ou de $f = c - x$, l'on aura $y = g - \frac{f\,dp}{dx} + \frac{f^2\,ddp}{2\,dx^2}$ &c. $\pm f\sqrt{f} \times \left(q - \frac{f\,dq}{dx} + \frac{f^2\,d^2q}{2\,dx^2} - \text{&c.}\right)$; & parce que l'on peut ſuppoſer f aſſez petite pour que f^2, f^3 &c. diſparoiſſent devant f, l'on aura $y = g - \frac{f\,dp}{dx} + f\sqrt{f}.q$ (A). Ces valeurs ſeront toutes les deux plus petites que g, ſi $\frac{dp}{dx}$ eſt une quantité poſitive; mais elles ſeront plus grandes que g, ſi $\frac{dp}{dx}$ eſt une quantité négative; donc dans le premier cas y ſera un *maximum* & dans le ſecond cas un *minimum*. Mais, comme on le voit, y eſt alors *maximum* ou *minimum* par rapport aux valeurs antécédentes, & non aux valeurs ſuivantes qui ſont imaginaires.

(*) On ſuppoſe c & x poſitifs.

(**) C'eſt la formule R (85) en ſubſtituant g pour y, & dp pour dy, &c.

Suppoſons que l'équation d'une courbe ſoit $y = \frac{x^2}{a} \pm (c - x) \cdot \sqrt{(c - x) \cdot x^2}$, il eſt viſible (fig. 60) qu'en ſuppoſant $AP = x = c$, l'on aura $y = \frac{c^2}{a} = PM$. Mais en ſuppoſant $x > c$, y ſera imaginaire; en ſuppoſant $x < c$, l'on aura deux ordonnées pm, pn toutes les deux plus petites que PM. De ſorte que la courbe a deux branches qui partent de M; ou, ſi l'on veut, la courbe mMn, après avoir été juſqu'en M, rebrouſſe ſon chemin vers (A), & a une autre branche Mn. Le point M s'appelle un *point de rebrouſſement*.

En général toutes les courbes dont l'équation eſt $y = p \pm (c - x)^n \cdot \sqrt{(c - x) \cdot q}$, n étant un nombre entier, auront des ordonnées imaginaires correſpondantes aux x poſitifs plus grands que c.

En général ſi l'on ſuppoſe $y = p \pm q \cdot (c - x)^{\frac{2n+1}{2m}}$, $2n+1$ étant ſuppoſé $> 2m$, n & m étant des nombres entiers pairs ou impairs; parce que $(c - x)^{\frac{2n+1}{2m}}$ eſt la racine paire d'une quantité négative, lorſque $c < x$, on aura un *maximum*, ſi $\frac{dp}{dx}$ eſt poſitif, & un *minimum*, ſi $\frac{dp}{dx}$ eſt négatif. Si $\frac{dp}{dx} = 0$, l'on aura $y = g + \frac{f^2 d^2 p}{2 dx^2} + q \cdot f^{\frac{2n+1}{2m}}$; ſi $\frac{2n+1}{2m}$ n'eſt pas > 2,

le troiſiéme terme ne diſparoiſſant pas devant le ſecond, on n'aura ni *maximum* ni *minimum*. C'eſt ce qui arrive dans la courbe (fig. 61), dont l'équation eſt $y = \frac{x^2}{a} \pm x^2 . (c - x)^{\frac{3}{2}}$, parce que $f^{\frac{3}{2}} > f^2$; car alors de deux ordonnées pm, pn, l'une eſt plus grande & l'autre plus petite que PM. Si $\frac{d^2 p}{dx^2}$ eſt une quantité poſitive, en ſuppoſant $\frac{2n+1}{2m} > 2$, $y = g$ ſera un *minimum*; mais y ſera un *maximum*, ſi $\frac{d\,dp}{dx^2}$ eſt une quantité négative. On peut voir facilement comment il faut procéder ſi $\frac{d\,dp}{dx^2}$ eſt $= 0$; les *maxima* & les *minima* ordinaires n'empêchent pas qu'une courbe ait des *maxima* & des *minima* de la ſeconde eſpéce.

94. PROBLÊME. *Trouver les* maxima *& les* minima *de la fonction* $y = 2x - xx \pm (1 - x)^2 \times \sqrt{(1 - x)}$. Pour les *maxima* & les *minima* de la ſeconde eſpéce, ſubſtituant f à la place de $c - x = 1 - x$ (ici $c = 1$), l'on a $y = 1 - f^2 \pm f^2 \sqrt{f}$; quantité plus petite que 1, ſoit qu'on prenne le ſigne + ou le ſigne —. Car nous ſuppoſons f très-petite, ce qui fait que $f^2 \sqrt{f}$ diſparoît devant f^2; donc il y a un *maximum* de la ſeconde eſpéce qui répond à $x = 1$. Si l'on vouloit chercher les *maxima* & les *minima* de la

premiere eſpéce, on trouveroit $\frac{dy}{dx} = 2 - 2x \mp \frac{5}{2}.(1-x).\sqrt{(1-x)}$. Suppoſant $\frac{dy}{dx} = 0$, l'on trouve $x = 1$; & parce que $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{(1-x)} = -2$, dans la ſuppoſition de $x = 1$, il ſemble qu'on doit avoir un *maximum* de la premiere eſpéce pour l'ordonnée correſpondante à l'abſciſſe $x = 1$. Cependant ſi l'on décrit la courbe de l'équation $y = 2x - xx \pm (1-x)^2.\sqrt{(1-x)}$, on verra que les ordonnées correſpondantes aux abſciſſes poſitives plus grandes que 1 ſont imaginaires: ce qui prouve qu'il faut admettre une exception à la régle de M. Euler, que nous venons d'expliquer. Mais par notre méthode, on trouveroit que dans ce cas l'on n'a ni *maximum* ni *minimum* de la premiere eſpéce.

Lorſque l'on aura pour $\frac{ddy}{dx}$ une valeur de cette forme $a \pm b\sqrt[m]{(c-x)}$, a & b étant des quantités poſitives ou négatives, & m un nombre pair, 2, 4, 6 &c. laquelle valeur deviendra $= a$, dans la ſuppoſition de $x = c$, la méthode de M. Euler pourra induire en erreur pour les *maxima* & les *minima* de la premiere eſpéce, lorſqu'on les cherchera dans la ſuppoſition que l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$ ait donné $x = c$.

Revenons à l'équation $\frac{dy}{dx} = 0 = 2 - 2x \mp \frac{5}{2}(1-x).\sqrt{(1-x)} = 0$. Cette derniere équation étant diviſée par $1-x$, l'on a $4 \mp$

$5\sqrt{(1-x)}=0,4=\pm 5\sqrt{(1-x)}$, ou $16=25-25x$, ou $25x=9$, & $x=\frac{9}{25}$. Subſtituant cette valeur de x (*) dans $\frac{ddy}{dx^2}$ $=-2\pm\frac{15}{4}\sqrt{(1-x)}$, il vient $\frac{ddy}{dx^2}$ $=-2\pm 3$. En prenant le ſigne ſupérieur (**), on a un *minimum* pour y, qui alors ſera $\frac{2869}{3125}$. Si l'on prend le ſigne inférieur, l'on a $y=\frac{821}{3125}$, qui paroît un *maximum*; mais le ſeul ſigne ſupérieur peut avoir lieu, parce qu'on ne peut avoir $4\mp 5.\sqrt{(1-x)}=0$, à moins que $5\sqrt{(1-x)}$ ne ſoit $=4$ & $4-5\sqrt{(1-x)}=0=4-4$. Le *minimum* de la premiere eſpéce n'a donc lieu que pour les ordonnées de la ſeule branche déſignée par $y=2x-x^2+(1-x)\times\sqrt{(1-x)}$.

95. PROBLÊME. *Trouver les* maxima *& les* minima *de la ſeconde eſpéce dans la fonction* $y=x\pm(1-x).\sqrt{(1-x)}$. Suppoſant $1-x=c-x=f$, ou $x=1-f$, l'on aura $y=1-f\pm f\sqrt{f}$ (***) $=1-f$; car $f\sqrt{f}$ diſparoît à cauſe qu'on ſuppoſe f très-petite. Donc y devient un *maximum* de la ſeconde eſpéce, lorſque $x=1$.

REMARQUE. Si l'équation n'étoit pas ſous la

(*) On doit faire attention que cette valeur de x n'eſt pas $=1$, qui ici eſt $=c$.

(**) Pour la valeur de $\frac{ddy}{dx^2}$ & pour la valeur de y dans l'équation propoſée.

(***) C'eſt la valeur de y dans la ſuppoſition de $1-x=f$.

forme $y = p \pm (c - x)^n . \sqrt[m]{(c - x)} . q$, on l'y rameneroit en cherchant la valeur de y en x.

Si l'on avoit une équation telle que $y = p \pm (x - c) . \sqrt[m]{(x - c)} . q$, q étant une conſtante ou une fonction de x qui ſoit poſitive, quelque valeur que l'on donne à x, p étant une fonction de x, on ſuppoſe que p & q ne ſont pas diviſibles par $x - c$; en ſuppoſant $x - f = c$, ou en ſuppoſant $x = c$, l'on aura $y = p$. Mais y devient imaginaire, ſi $x < c$, tandis qu'il a deux valeurs réelles, lorſque $x > c$. Cela arrivera toutes les fois que l'on aura une équation de cette forme $y = p \pm (x - c)^n . \sqrt[m]{(x - c)} . q$ (*), m étant un nombre pair & n un nombre entier; ou de celle-ci $y = p \pm q . (x - c)^{\frac{2n+1}{2m}}$, m & n étant des nombres pairs ou impairs, pourvu que $2n + 1 > 2m$. Et ſi l'on ſuppoſe que la fig. 62 repréſente une de ces ſortes de courbes de maniere que $AP = x$ ſoit $= c$, $PM = y = p$, les ordonnées correſpondantes aux abſciſſes Ap plus grandes que c, ſeront réelles; mais les ordonnées correſpondantes aux abſciſſes $AB < c$ ſeront imaginaires. La courbe aura un point M, d'où partiront deux branches qui s'étendront du côté des abſciſſes poſitives. Si en ſuppoſant les points P & p très-proches, l'on a les ordonnées pn & pm toutes les deux plus grandes ou toutes les deux plus petites que PM, dans le premier cas PM ſera un *minimum* & dans le ſecond cas un *maximum*. Nous appellerons cette eſpéce de *maximum* ou de *minimum* un *maximum* ou un *minimum* de la troiſiéme eſpéce; il differe de celui de la ſeconde, en ce que dans celui de la

(*) c peut être $= 0$.

troiſiéme eſpéce l'ordonnée y eſt un *maximum* ou un *minimum* par rapport aux valeurs ſuivantes, au lieu que dans le *maximum* ou le *minimum* de la ſeconde eſpéce, y eſt *maximum* ou *minimum*, par rapport aux valeurs antécédentes de y; mais ſi $pn > PM$ & $pm < PM$, l'on n'a ni *maximum* ni *minimum*.

Pour trouver ces ſortes de *maximum* & de *minimum*, on ſuppoſera qu'en faiſant $x = c$, l'on ait $p = g$. Si on ſuppoſe x un peu plus grand que c, c'eſt-à-dire, ſi on ſuppoſe $x - f = c$; (f étant une quantité infiniment petite) ou $x = c + f$, la fonction p ſe changera en $g + \frac{f\,dp}{dx} + \frac{f^2\,d^2p}{2.dx^2} +$ &c. & la fonction q deviendra $q + \frac{f\,dq}{dx} + \frac{f^2\,d^2q}{2.dx^2} +$ &c. Donc dans ce cas on aura $y = g + \frac{f.dp}{dx} + \frac{f^2\,d^2p}{2.dx^2} +$ &c. $\pm f^{\frac{2n+1}{2m}}.\,(q + \frac{f\,dq}{dx} +$ &c.), & parce que f eſt ſuppoſée infiniment petite, l'on a $y = g + \frac{f\,dp}{dx} \pm f^{\frac{2n+1}{2m}}\,q$.

Maintenant ſi $\frac{dp}{dx}$ eſt une quantité poſitive (en ſuppoſant $\frac{2n+1}{2m} > 1$), y ſera un *minimum*; ſi $\frac{dp}{dx}$ eſt une quantité négative, $y = g$ ſera un *maximum*; mais ſi $\frac{2n+1}{2m}$ n'eſt pas > 1,

on n'aura ni *maximum* ni *minimum*. Si $\frac{dp}{dx} = 0$, alors $y = g + \frac{f^2 ddp}{2.dx^2} \pm q.f^{\frac{2n+1}{2m}}$. Si dans ce cas $\frac{2n+1}{2m}$ n'eſt pas > 2, l'on n'a ni *maximum* ni *minimum*; ſi $\frac{2n+1}{2m} > 2$, alors $y = g$ ſera un *maximum* ou un *minimum*, ſelon que $\frac{d^2p}{dx^2}$ ſera une quantité négative ou poſitive. Il n'eſt point difficile de voir comment on doit procéder lorſque $\frac{ddp}{dx^2} = 0$.

96. PROBLÊME. *Trouver les* maxima ou minima *de la troiſiéme eſpéce de la fonction* $y = ax \pm (x-1)^{\frac{3}{2}} \times x^2 = ax \pm (x-1).\sqrt{(x-1)}.xx$. Dans la ſuppoſition de $x = 1$, (c eſt ici $= 1$), l'on a $y = a = g$; mais $p = ax$, $\frac{dp}{dx} = a$, $\frac{2n+1}{2m} = \frac{3}{2} > 1$; donc $y = g$ ſera un *minimum*, ſi a eſt poſitif, & un *maximum*, ſi a eſt négatif. La figure 62 peut repréſenter le premier cas, & la figure 63 le ſecond.

Avant de paſſer plus loin, nous allons parler d'un cas dans lequel les valeurs antécédentes de y ſont imaginaires, auſſi bien que les conſéquentes. Qu'on demande, par exemple, de trouver le *maximum* ou le *minimum* de y, en ſuppoſant que l'on a l'équation $y^4 + x^4 = 4xy - 2$. En différenciant, l'on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^3}{y^3 - x}$.

Suppoſant $\frac{dy}{dx} = 0$, l'on a $x^3 = y$. Subſtituant cette valeur de y dans l'équation propoſée, il vient $x^{12} + x^4 = 4x^4 - 2$, ou $x^{12} - 3x^4 + 2 = 0$, cette équation donne les diviſeurs $x^4 - 1 = 0$, $x^8 + x^4 - 2 = 0$. Cette derniere équation donne $x^4 - 1 = 0$ & $x^4 + 2 = 0$. La derniere équation a toutes ſes racines imaginaires. Les équations $x^4 - 1 = 0$, $x^4 - 1 = 0$ donnent chacune $x^2 = 1$ (*) & $x = \pm 1$; donc on a deux valeurs poſitives & deux valeurs négatives de x, & chacune de ces valeurs eſt l'unité; & à cauſe de $x^3 = y$, l'on a $y^3 - x = 1 - 1 = 0$; donc, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus, l'on doit avoir $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Pour ſavoir ſi dans ce cas il y a un *maximum* ou un *minimum*, ſoit $x = 1 - f$ & $y = 1 - n$, f & n étant ſuppoſées infiniment petites; en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation donnée, on aura

$$\begin{array}{llll} 1 - 4n + & 1 - 4f & & \\ + 6n^2 + & 6f^2 = & 4 - 4f - 4n - 2 & : \\ - 4n^3 - & 4f^3 & + 4fn, & \\ + n^4 & + f^4 & & \end{array}$$

ou en négligeant les puiſſances de n & de f au-deſſus du ſecond degré, $6n^2 = 4nf - 6f^2$, ou $6n^2 - 4nf = -6f^2$, ou $n^2 - \frac{2}{3}nf = -f^2$, ou $n^2 - \frac{2}{3}nf + \frac{f^2}{9} = \frac{f^2}{9} - f^2 = \frac{f^2 - 9f^2}{9} = -\frac{8}{9}f^2$, donc $n - \frac{1}{3}.f = \pm\sqrt{(-\frac{8}{9}f^2)}$, & $n = \frac{f \pm f\sqrt{(-8)}}{3}$.

(*) $x^4 - 1 = 0$ eſt diviſible par $x^2 - 1 = 0$ & donne pour quotient $x^2 + 1 = 0$, dont les racines ſont imaginaires.

quantité imaginaire, ſoit qu'on prenne f poſitive ou négative, c'eſt-à-dire, ſoit qu'on augmente ou qu'on diminue l'abſciſſe; ainſi le point qui répond à $x = 1$ & à $y = 1$, eſt un point conjugué, & l'ordonnée y n'eſt ni un *maximum* ni un *minimum* de la premiere ou de la ſeconde ou de la troiſiéme eſpéce; car les ordonnées voiſines à la droite ou à la gauche ſont imaginaires.

97. Lorſque la fonction V dont on veut trouver le *maximum* ou le *minimum* eſt compoſée de deux variables x & y, ſi ces variables ſont ſéparées & qu'on ait $V = A + B$, A étant une fonction de x & B une fonction de y, V deviendra un *maximum*, dans le cas que A & B ſeront des *maximum*, & un *minimum* lorſque ces quantités ſeront des *minimum*. Mais on doit faire attention qu'on ne doit pas joindre le *maximum* de A avec le *minimum* de B, ou réciproquement; car alors V ne ſeroit ni *maximum* ni *minimum*. Si $V = A - B$, V ſera *maximum*, lorſque A ſera *maximum* & B *minimum*; ſi au contraire B eſt un *maximum* & A un *minimum*, V ſera un *minimum*, ce qui n'a pas beſoin de démonſtration. Si $A = x^3 - 3x^2 - 3x$, A ſera un *minimum*, lorſque l'on aura $x = 1 + \sqrt{2}$, & un *maximum*, ſi $x = 1 - \sqrt{2}$. Mais en ſuppoſant $B = y^4 - 8y^3 + 18yy - 8y$, l'on aura $\frac{dB}{dy} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8$. Suppoſant $\frac{dB}{dy} = 0$, l'on trouve $4y^3 - 24yy + 36y - 8 = 0$, ou $\frac{dB}{4dy} = y^3 - 6yy + 9y - 2 = 0$. Les racines de cette équation ſont $y = 2$, $y = 2 \pm \sqrt{3}$; donc puiſque $\frac{ddB}{4dy^2} = 3yy - 12y + 9$ devient $= -3$ dans la ſuppoſition de $y = 2$, dans ce cas B ſera un *maximum*. Pour les autres racines qui viennent de l'équation $yy - 4y + 1 = 0$, l'on a $\frac{ddB}{12dy^2} = 2$; donc l'une & l'autre donne un *minimum*; donc A + B ſera un *maximum*, ſi on ſup-

poſe $y = 2$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, & alors $V = A + B = 3 + 4\sqrt{2}$. Mais V ſera un *minimum*, ſi on ſuppoſe $x = 1 + \sqrt{2}$ & $y = 2 + \sqrt{3}$, ou $y = 2 - \sqrt{3}$, & dans l'un & l'autre cas on aura $V = -6 - 4.\sqrt{2}$. $B - A$ ſera un *maximum*, ſi $y = 2$ & $x = 1 + \sqrt{2}$, & alors $B - A = 13 + 4\sqrt{2}$. Mais on aura un *minimum*, ſi on fait $y = 2 \pm \sqrt{3}$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, & dans ce cas $B - A$ ſera $= 4 - 4\sqrt{2}$. Au reſte il s'agit ici des *maxima* & des *minima* de la premiere eſpéce.

Si V eſt une fonction des variables x & y mêlés enſemble, l'on aura $dV = p\,dx + q\,dy$, p & q étant des fonctions d'une des variables ou de toutes les deux. Maintenant ſuppoſant $p = 0$ & $q = 0$, on aura deux équations qui feront connoître x & y; mais pour le *maximum* ou le *minimum*, on joindra enſemble deux valeurs, l'une de x & l'autre de y, qui puiſſent enſemble rendre V *maximum* ou *minimum*. Mais on doit avoir l'attention de ne joindre que le *maximum* avec le *maximum* & le *minimum* avec le *minimum*. Pour trouver les valeurs de x, qui peuvent rendre V *maximum* ou *minimum*, on conſiderera y comme conſtant, & l'on différenciera V dans cette ſuppoſition pour avoir $dV = p\,dx$ & $\frac{dV}{dx} = p$. Différenciant p dans la même ſuppoſition de y conſtant, l'on a $\frac{ddV}{dx} = dp$, $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$.

Maintenant on examinera ſi $\frac{dp}{dx}$ (après avoir ſubſtitué les valeurs qu'ont donné les équations $p = 0$ & $q = 0$) eſt poſitif ou négatif; le premier cas indique un *minimum*, mais le ſecond cas indique un *maximum*.

De même en ſuppoſant x conſtant, l'on a $dV = q\,dy$, $\frac{dV}{dy} = q$, $\frac{ddV}{dy} = dq$, $\frac{ddV}{dy^2} = \frac{dq}{dy}$ (*).

Subſtituant dans $\frac{dq}{dy}$ les valeurs de x & de y données par

(*) Il eſt aiſé de voir qu'on ſuppoſe dy conſtant, comme en différenciant V dans la ſuppoſition de x variable, on a ſuppoſé dx conſtant.

les équations $q = 0$ & $p = 0$, on examinera si $\frac{dq}{dy}$ est positif ou négatif; le premier cas indique un *minimum* & le second cas indique un *maximum*. Si $\frac{dp}{dx}$ est positif & que les mêmes valeurs de y & de x rendent $\frac{dq}{dy}$ négatif ou réciproquement, l'on n'a ni *maximum* ni *minimum*. Si ces formules ou l'une des deux devient $= 0$, on aura recours à $\frac{ddp}{dx^2}$, & $\frac{ddq}{dy^2}$ (*). Si ces formules ne s'évanouissent pas, l'on n'aura ni *maximum* ni *minimum*; si elles s'évanouissent, on aura recours à $\frac{dddp}{dx^3}$, $\frac{d^3q}{dy^3}$, &c.

98. PROBLÈME. *Dans quels cas* $V = x^3 + y^3 - 3axy$ *devient* maximum *ou* minimum? L'on a $dV = 3xxdx + 3yydy - 3aydx - 3axdy$; donc $p = 3xx - 3ay$, $q = 3yy - 3ax$. Supposant $p = 0$ & $q = 0$, l'on a $3xx - 3ay = 0$, $xx = ay$, $y = \frac{xx}{a}$, & $y^2 = \frac{x^4}{aa}$. Mais l'équation $q = 0$ donne $yy = ax$; donc $ax = \frac{x^4}{aa}$; $a^3x = x^4$, $a^3 = x^3$, $x = a$. L'équation $a^3x = x^4$, donne aussi $x^4 - xa^3 = 0$ ou $x = 0$; si l'on substitue ces valeurs de x dans $y = \frac{xx}{a}$, l'on a $y = a$ ou $y = 0$; mais $\frac{dp}{dx} = 6x$, $\frac{ddp}{dx^2} = 6$, $\frac{dq}{dy} = 6y$, $\frac{ddq}{dy^2}$

(*) Si $\frac{dp}{dx}$ s'évanouit seul, alors on a recours seulement à $\frac{ddp}{dx^2}$ pour ce qui regarde x, & l'on revient pour y à la formule $\frac{dq}{dy}$, ou réciproquement.

$= 6$.

$= 6$. En ſuppoſant $x = 0$ & $y = 0$, il vient $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy}$ $= 0$, & dans le cas de $x = a$ & $y = a$, l'on a $\frac{dp}{dx} = 6a$ $= \frac{dq}{dy}$. Donc l'on a un *minimum* pour ce cas, & alors $V = -a^3$

99. Si l'on avoit $V = A + B + C$, A étant une fonction de x, B une fonction de y, C une fonction de z, V ſeroit un *maximum* ou un *minimum*, dans les mêmes cas que A, B, C ſeroient à la fois chacun un *maximum* ou un *minimum*. Mais ſi l'on avoit $A + B - C$, en conſidérant $A + B$ comme une fonction de x & de y, cette quantité ſeroit un *maximum*, lorſque $A + B$ ſeroit un *maximum* & C un *minimum*. Si C étoit un *maximum* & $A + B$ un *minimum*, cette quantité ſeroit un *minimum*. De même en faiſant $V = A - B - C$, l'on auroit un *maximum*, lorſque A ſeroit un *maximum*, $B + C$ étant un *minimum*. Mais ſi A étoit *minimum*, $B + C$ étant *maximum*, V ſeroit un *minimum*. Or par les principes précédens, il eſt aiſé de voir dans quels cas A, B & C deviennent *maxima* & *minima*; donc on peut trouver les *maxima* & les *minima* de ces ſortes de quantités. Si V étoit une fonction de x, y, z mêlés enſemble, de maniere qu'on eût $dV = p\,dx + q\,dy + r\,dz$, on ſuppoſeroit $p = 0$, $q = 0$ & $r = 0$. Ces équations ſuffiſent pour faire connoître x, y & z. On fera attention enſuite que $p\,dx$ repréſente la différence de V, en faiſant varier x ſeulement; donc $dV = p\,dx$, & dans cette ſuppoſition $\frac{dV}{dx} = p$. Différenciant encore dans la même ſuppoſition, l'on aura $\frac{ddV}{dx} = dp$, $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$. On examinera ſi $\frac{dp}{dx}$ (en ſubſtituant les valeurs de x, y, z trouvées par les équations $p = 0, q = 0, r = 0$) eſt une quantité poſitive ou négative; le premier cas indiquera un *minimum*, le ſecond cas indique un *maximum*. On portera le même jugement pour la quantité $\frac{ddV}{dy^2} = \frac{dq}{dy}$, qu'on trouve en faiſant

varier seulement y, & pour $\frac{ddV}{dz^2} = \frac{dr}{dz}$, qu'on trouve en faisant varier seulement la quantité z. On aura soin de ne joindre ensemble que des *maxima* & des *minima*. Si l'on trouve un *maximum* seulement pour une variable & des *minima* pour les autres variables, ou des *maxima* pour deux variables, & un *minimum* pour la troisiéme variable, &c. l'on n'aura ni *maximum* ni *minimum*. Si $\frac{dp}{dx} = 0$, on aura recours à $\frac{ddp}{dx^2}$; de même si $\frac{dq}{dy} = 0$, on aura recours à $\frac{ddq}{dy^2}$; &c. De même si $\frac{dr}{dz} = 0$, on examinera $\frac{ddr}{dz^2}$; si $\frac{ddq}{dy^2}$, $\frac{ddp}{dx^2}$, $\frac{ddr}{dz^2}$ ne s'évanouissent pas, l'on n'aura ni *maximum* ni *minimum*; si ces quantités sont $= 0$, on aura recours à $\frac{d^3p}{dx^3}$, $\frac{d^3q}{dy^3}$, $\frac{d^3r}{dz^3}$; &c.

100. PROBLÈME. *Dans quel cas* $V = x^3y - 12xyz^2 + \frac{64zy^3}{27} + \frac{128z^3}{3}$ *devient* maximum *ou* minimum? L'on a $dV = 3x^2y\,dx - 12yz^2\,dx + x^3 \times dy - 12xz\,z\,dy + \frac{64zy^2\,dy}{9} + 128z^2\,dz + \frac{64y^3\,dz}{27} - 24xyz\,dz$; donc en faisant $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, l'on aura $p = 3x^2y - 12yz^2 = 0$, $q = x^3 - 12xz^2 + \frac{64zy^2}{9} = 0$, $r = 128z^2 + \frac{64y^3}{27} - 24xyz = 0$. La premiere équation donne (en transposant & divisant par $3y$) $xx = 4z^2$, ou $x = 2z$ (A). Substituant cette valeur de x dans la seconde équation, il vient $8z^3 - 24z^3 + \frac{64zy^2}{9} = 0$, ou $-16z^3 + \frac{64y^2}{9} = 0$, ou $\frac{64}{9} \times y^2 = 16z^2$, ou $\frac{1}{3}y$.

$= 4z$, où $y = \frac{12}{8} \cdot z = \frac{24}{2}$ (B). Substituant dans la troisième équation les valeurs de x & de y, prises des équations A & B, il vient $128z^2 + \frac{64.272z^3}{27.8} - 24 \times 2 \times \frac{1}{2} \cdot z^3 = 0$, ou $8.8.2 + 8z - 8.9z = 0$, ou $16 + z - 9z = 0$, ou $16 = 8z$ & $z = 2$. Substituant cette valeur de z dans les équations A & B, l'on trouve $x = 4$ & $y = 3$. Maintenant $\frac{dp}{dx} = 6xy = 72$, qui indique un *minimum*, $\frac{dq}{dy} = \frac{128yz}{9} = \frac{8.8.2.3.2}{3.3}$, quantité positive qui indique aussi un *minimum*. Mais $\frac{dr}{dz} = 128 \times 2z - 24x.y = 512 - 288 = 224$; quantité positive qui indique encore un *minimum*; donc la fonction V deviendra un *minimum*, en supposant $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$, & alors $V = 85\frac{1}{3}$; & soit qu'on suppose les quantités x, y, z, augmentées ou diminuées d'une quantité fort petite f, on aura un résultat plus grand.

On doit remarquer que si les équations $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ &c. donnoient pour les variables x, y, z &c. des valeurs imaginaires ou contradictoires, dans ce cas on n'auroit ni *maximum* ni *minimum*. Il peut encore arriver qu'on trouve un *minimum* tel qu'il ne soit pas possible d'en avoir un plus petit, ce qui vient des puissances paires des variables qui se trouvent dans la valeur de V. C'est ainsi que $V = xx + xy + y^2 - x - y$ est un *minimum* $= -\frac{1}{3}$, lorsque $x = \frac{1}{3}$ & $y = \frac{1}{3}$ & qu'il est impossible de le rendre plus petit, s'entend en regardant les quantités négatives comme au-dessous de 0 : car autrement cela seroit très-possible.

Si $V = A + B + B + D + E + F +$ &c, A étant une fonction de x, B une fonction de y, C une fonction de z, E une fonction de x', D une fonction de x'', &c, V sera un *maximum* ou un *minimum*, lorsque A, B, C, &c. seront à la fois des *maximum* ou des *minimum*. Mais si $V = A + B - C - D$, pour que V soit un *maximum*, il faut que la quantité $-C-D$, qui est soustraite, soit un *minimum*, lorsque la quantité $A+B$ dont on soustrait est un *maximum*. Mais V sera un *minimum*, si la quantité dont on soustrait est un *minimum* & la quantité soustraite un *maximum*.

si V est une fonction des variables x, x', x'' &c. y, y', y'' &c. z, z', z'' &c. mêlés ensemble, l'on aura $dV = p\,dx + p'\,dx' + p''\,dx'' +$ &c. $+ q\,dy + q'\,dy' + q''\,dy'' +$ &c. $+ r\,dz + r'\,dz' + r''\,dz''$ &c, & l'on fera $p = 0$, $p' = 0$, $p'' = 0$, $q = 0$, $q' = 0$, $q'' = 0$, $r = 0$, $r' = 0$, $r' = 0$, &c. De ces équations, par les régles ordinaires de l'Algébre, on tâchera de tirer les valeurs de x, x' &c. on aura ensuite $\frac{dV}{dx} = p$, $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, $\frac{ddV}{(dx')^2} = \frac{dp'}{dx'}$, &c. Si ces quantités sont positives, elles indiqueront des *minima*, & des *maxima* si elles sont négatives ; mais si une valeur de x indique un *maximum* & que la valeur de x' indique un *minimum*, ces valeurs de x & x' ne donneront pour V ni *maximum* ni *minimum*. Si $\frac{dp}{dx}$, &c $= 0$, on examinera si $\frac{ddp}{dx^2}$, $\frac{ddp'}{(dx')^2}$ &c. s'évanouissent ou non, si ces quantités ne s'évanouissent pas, l'on n'aura ni *maximum* ni *minimum*. Si $\frac{ddp}{dx^2}$ disparoît, on examinera si $\frac{d^3p}{dx^3}$ est positif ou négatif. Le premier cas indique un *minimum*, le second cas indiquant un *maximum*.

De même si l'on a $\frac{ddp}{(dx')^2} = 0$, si $\frac{d^3p'}{(dx')^3}$ est positif, le *minimum* est indiqué ; au contraire le *maximum* est indiqué, si cette quantité est négative &c. Mais si un *maximum* ou un *minimum* étant indiqué par $\frac{d^3p}{dx^3}$, $\frac{d^3p'}{(dx')^3}$ &c, $\frac{ddq}{dy^2}$ ne s'évanouissoit pas, ce qui indiqueroit que la valeur de y (ou aucune des valeurs de y, si aucune d'elles ne peut faire évanouir cette quantité) ne peut donner ni *maximum* ni *minimum* ; dans ce cas l'on n'auroit ni *maximum* ni *minimum*. Si les équations $p = 0$, $p' = 0$ &c. donnoient plusieurs valeurs pour les variables x, x' &c. il faudroit joindre ensemble celles qui donnent à la fois un *maximum* ou un *minimum*, & rejetter les autres comme inutiles.

Des développées & des rayons ofculateurs.

101. Si on conçoit qu'un fil enveloppant une courbe ABC (fig. 64) vienne à ſe développer en reſtant toujours tendu ſans cependant s'allonger, l'extrémité A de ce fil décrira une courbe AFN, qu'on appelle *courbe de développement*, la courbe ABC s'appelle *la développée*, les portions BE, CF &c. du fil ſont appellées *rayons de la développée*.

COROLLAIRE I. Si le fil ſe termine au ſommet A de la développée, il eſt évident que chaque partie BE de ce fil eſt égale à l'arc développé AB; mais chaque rayon FC ſera plus grand que l'arc correſpondant, ſi on ſuppoſe que le ſommet de la développée eſt en B, de maniere que AB ſoit une ligne droite. En général le rayon de la développée eſt égal à l'arc développé, en ajoutant une conſtante, s'il le faut.

COROLLAIRE II. Chaque rayon BE de la développée pouvant être regardé comme le prolongement de l'arc infiniment petit BC, arc qui peut être conſidéré comme une ligne droite, il eſt viſible, 1°. que chaque rayon de la développée eſt tangente de la développée; 2°. que le fil BE en paſſant de EB en FC, décrit un petit arc EF, qu'on peut regarder comme un arc circulaire dont le centre ſeroit en C; de maniere que le rayon FC eſt perpendiculaire à la tangente FT au point F de la ligne de développement (car le rayon d'un cercle eſt perpendiculaire à la tangente du cercle qui aboutit à l'extrémité de ce rayon, voyez la Géométrie. Donc ſi des extrémités E, F d'un arc infiniment petit d'une courbe, l'on tire deux perpendiculaires EC, FC, ces perpendiculaires ſe rencontreront en un point C, qui ſera un point

de la développée de la courbe donnée, & l'on pourra regarder l'arc EF comme un arc circulaire décrit du centre C. Mais parce que les cercles ſont d'autant moins courbes, que leurs rayons ſont plus grands, il eſt viſible que la courbe de développement deviendra d'autant moins courbe qu'elle s'éloignera plus du point A, où aboutit le rayon de la développée qui eſt = 0 ou qui eſt le plus petit. Ainſi la plus grande courbure ſe trouvera en cherchant le plus petit rayon, & la moindre courbure ſe trouvera en cherchant le plus grand rayon de la développée; & cela par la méthode des *maximis* & des *minimis*.

REMARQUE. Si du point P avec un rayon FP plus grand que BC, on décrivoit un arc de cercle, cet arc paſſeroit au-deſſus de l'arc EF. Il paſſeroit au contraire au-deſſous de cet arc, ſi on prenoit un rayon *p*F plus petit que FC; donc le cercle décrit du point C avec le rayon FC, eſt celui qui ſe confond le plus exactement avec l'arc infiniment petit EF. Ce cercle eſt appellé *cercle oſculateur*, & ſon rayon eſt appellé *rayon oſculateur*, *rayon de la développée*, *rayon de courbure*, parce que la courbure de l'arc infiniment petit FE de la courbe de développement eſt la même que celle de l'arc correſpondant du cercle oſculateur.

Nous appellerons *angle de courbure* (fig. 65) d'un arc EF d'une courbe l'angle ECF que forment deux lignes perpendiculaires à cet arc menées par ſes extrémités; cet angle eſt égal à celui que forment les deux tangentes menées par les extrémités de cet arc. En effet les angles du quadrilataire MECF valent quatre angles droits. Or les angles CEM, CFM ſont droits; donc FME + FCE valent deux angles droits.

Mais FME + FMN valent auſſi deux angles droits; donc ECF = FMN. De plus en regardant l'arc infiniment petit EF comme circulaire, & tirant la corde EF, l'angle NMF, extérieur au triangle EMF, vaut les deux angles intérieurs E & F; mais ces angles ſont égaux, parce qu'étant faits par une corde & une tangente, ils ont chacun pour meſure la moitié de l'arc EF; donc chacun de ces angles eſt la moitié de l'angle de courbure. Mais ſi on ſuppoſe que l'arc *ef* eſt = EF & que le rayon *ec* eſt moitié du rayon EC, il eſt viſible que l'angle *ecf* ſera double de l'angle ECF, & que l'angle *nmf* ſera auſſi double de l'angle NMF; de ſorte qu'en général les angles de courbure ſont en raiſon inverſe des rayons oſculateurs; donc auſſi les courbures des cercles ſont en raiſon inverſe de leurs rayons.

REMARQUE. Le triangle EMF eſt donc iſoſcelle, & l'angle de courbure NMF, meſuré par l'arc EF qu'on ſuppoſe infiniment petit, eſt auſſi infiniment petit.

COROLLAIRE. Il ſuit de ce que nous venons de dire, qu'un arc de courbe EF ne peut être regardé comme circulaire, ou ce qui revient au même, ne peut avoir une courbure circulaire ou un cercle oſculateur, ſi les angles E & F ne ſont chacun la moitié de l'angle NMF que forment les tangentes extrêmes, ou ce qui revient au même, ſi les angles E & F, formés par la corde & les tangentes extrêmes, ſont inégaux.

102. COROLLAIRE II. Il ſuit du corollaire précédent & de la remarque précédente, qu'il y a des arcs de courbe qui n'ont aucune courbure circulaire. Soit *fe* (fig. 66.) un arc infiniment petit d'une parabole quelconque différente de la parabole or-

dinaire, que le ſommet de cette parabole ſoit en f, je mene l'ordonnée ep perpendiculaire à l'axe pn, la tangente en & la tangente fm (qu'on peut regarder comme l'ordonnée prolongée du point f de la courbe). L'angle de courbure fmn étant infiniment petit (remarque précédente), l'angle $mfn = epn$ étant droit, l'angle mnf ne differe d'un angle droit que d'une quantité infiniment petite; ainſi on peut le regarder comme étant égal à l'angle nfm; & partant le triangle mfn doit être cenſé iſocelle, & par conſéquent mn eſt cenſée $= fm$; donc $fm : me :: mn : me$. Or à cauſe des triangles ſemblables nmf & nep, $mn = mf : em :: nf : fp$. Mais dans aucune parabole (ſi on excepte la parabole vulgaire) nf n'eſt pas $= fp$; donc on n'a pas non plus $em = fm$; donc le triangle emf n'eſt pas iſocelle; donc les angles mef, mfe ne ſont pas égaux; donc la courbure de l'arc ef n'eſt pas circulaire, & il n'y a aucun cercle ni fini ni infiniment grand ni infiniment petit qui ait une courbure égale à la courbure d'un tel arc.

J'ai dit que dans aucune parabole ſi on excepte la parabole vulgaire, on n'a pas $nf = fp$. En effet, il faudroit qu'on eût la ſous-tangente $pn = 2.fp$; or la ſous-tangente des paraboles eſt (10) $= \frac{(m+n)x}{n}$; donc la ſous-tangente eſt à l'abſciſſe $fp = x$, comme $\frac{(m+n).x}{n} : x ::$ $(m+n)x : nx :: m+n : n$; mais dans la ſeule parabole ordinaire, l'on a $m = n = 1$; donc dans la ſeule parabole vulgaire $np : fp :: 2 : 1$; donc &c.

REMARQUE. Cependant les Géométres enſeignent communément que tout arc de courbe à

une courbure circulaire; mais ce que nous venons de dire suffit pour faire comprendre ce qu'il faut penser d'une telle doctrine.

Cherchons maintenant les expressions de certaines lignes qui nous serviront pour trouver les formules du rayon osculateur; mais on doit bien sentir qu'il ne s'agit pas ici des courbures qu'ont les courbes dans quelques points singuliers,

103. Soit la courbe A B D dont AP est la ligne des abscisses (fig. 67), & dans laquelle on ait coupé les arcs infiniment petits BC, CD, qui ne doivent différer entr'eux que d'une quantité infiniment petite, par rapport à ces mêmes arcs. Qu'on mene la corde BC prolongée jusqu'en M, les ordonnées & les autres lignes que représente la figure. Faisons $Pn = BF = dx$, $CS = dx + ddx$, $BC = ds$, $AC = s$, $FC = dy$. Les triangles BFC, CSM étant semblables (à cause des parallèles BF, CS), l'on a $dx : dy :: dx + ddx : SM = \frac{dx\,dy + dy\,ddx}{dx}$; mais $SD = dy + ddy$ (*); Donc $DM = SM - SD = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dx}$.

Supposant que la ligne DL représente un arc de cercle décrit du point C comme centre, cet arc pourra être regardé comme une ligne droite perpendiculaire sur CM; & comme l'angle biD est double

(*) Car lorsque dx devient $= dx + ddx$, dy devient $= dy + ddy$; mais ici x augmentant, dy va en diminuant, & l'on a ddy négatif; c'est-à-dire, que $SD = y - ddy$, ou $SD = dy + ddy$, en se souvenant que ddy est ici négatif. Si la courbe étoit convexe du côté de l'axe AR, ddy seroit positif.

de iCD, l'on a $biD = MCD$; donc cet arc mesure l'angle de courbure $CQD = biD$.

Les triangles MLD, CSM ayant l'angle M commun & les angles L & S droits, sont semblables; donc CM : CS ou BC : BF :: DM : DL, ou $ds : dx :: \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dx} : DL = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^2}$.

Si l'on suppose $DL = q$, le rayon $= 1$, & qu'on fasse $ds : 1 :: q : \frac{q}{ds} = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^3}$, l'on aura la mesure d'un angle que nous ferons aussi $= q$.

Il est bon de faire attention à cette valeur de la mesure de l'angle q, laquelle seroit négative, si la courbe étoit convexe du côté de l'axe, parce qu'alors la ligne DL seroit située du côté de l'axe.

Cela posé, en supposant que les lignes CQ, DQ sont des rayons osculateurs, l'angle Q sera $= biD = 2.iCD = LCD$; ainsi les triangles LCD, CQD sont semblables & isocelles. Donc LD : CD :: CD : DQ (*) ou $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds} : ds :: ds : DQ = \frac{ds^3}{dy\,ddx - dx\,ddy}$, valeur du rayon osculateur, que nous ferons $= R$.

Si du point Q l'on tire QN perpendiculaire sur Cn, prolongée, s'il le faut, l'on aura un triangle rectangle dont le rayon osculateur CQ sera l'hypo-

(*) La corde CD étant censée se confondre avec l'arc infiniment petit CD, est censée égale à cet arc.

ténuſe, il s'agit de trouver les côtés de ce triangle (que nous appellerons *côtés du rayon oſculateur*). Les angles N C S, Q C b étant droits, ſi l'on en retranche l'angle commun Q C S, l'on aura N C Q = S C b; ainſi les triangles C S b, C N Q ſeront ſemblables, & donneront C b : C S :: C Q : C N, & C b : b S = S D (*) :: C Q : N Q; donc

$ds : dx + ddx = dx :: \frac{ds^3}{dy\,ddx - dx\,ddy} : CN = \frac{dx\,ds^2}{dy\,ddx - dx\,ddy}$, & $ds : dy :: \frac{ds^3}{dy\,ddx - dx\,ddy} : NQ = \frac{dy\,ds^2}{dy\,ddx - dx\,ddy}$.

Les expreſſions ci-deſſus deviendront plus ſimples, en ſuppoſant quelque différentielle conſtante. Si on ſuppoſe dx conſtant, l'on a $ddx = 0$; R $\frac{-ds^3}{dx\,ddy}$; CN $= \frac{-ds^2}{ddy}$; NQ $= \frac{-dy\,ds^2}{dx\,ddy}$. Si on ſuppoſe dy conſtant, l'on a $ddy = 0$ & R $= \frac{ds^3}{dy\,ddx}$, CN $= \frac{dx\,ds^2}{dy\,ddx}$, & NQ $= \frac{ds^2}{ddx}$. Si par l'équation de la courbe, après avoir éliminé les différentielles, l'on trouve le

(*) Car l'angle b C D étant infiniment petit, le côté b D qui lui eſt oppoſé eſt infiniment petit par rapport à C D, qui eſt infiniment petit du premier ordre, auſſi bien que S D; donc D b eſt infiniment petit, par rapport à S D; donc la ligne S D eſt cenſée = S b. De plus l'arc infiniment petit C D eſt cenſé ſe confondre avec ſa tangente, & l'on peut ſuppoſer que cet arc eſt égal à la tangente C b = C x, puiſque C x & C b ne peuvent différer que de x b, quantité infiniment petite par rapport à C b, qui eſt infiniment plus grand que b D; or b D, D x, x b ſont de même eſpéce.

rayon oſculateur R ou le côté CN poſitif, la courbe ſera concave du côté de l'axe; au contraire la courbe tournera ſa convexité vers ſon axe, ſi le rayon oſculateur eſt négatif, ou ſi le côté CN eſt négatif.

Si on ſuppoſe ds conſtant, l'on aura $dds = 0$. Mais $ds^2 = dx^2 + dy^2$; donc $2\,ds.\,dds = 2\,dx.\,ddx + 2\,dy.\,ddy = 0$, & $ddy = -\frac{dx.\,ddx}{dy}$. Si l'on ſubſtitue cette valeur de ddy dans l'expreſſion du rayon oſculateur, nous aurons $R = \frac{ds^3.\,dy}{dy^2.\,ddx + dx^2.\,ddx} = \frac{ds^3.\,dy}{ds^2\,ddx} = \frac{ds\,dy}{ddx}$.

Les formules que nous venons de trouver ont lieu, ſi les ordonnées ſont perpendiculaires aux abſciſſes.

Si l'angle BTA des co-ordonnées n'eſt pas droit, ſoit le *ſinus* de cet angle $= a$, ſon *coſinus* $= c$, $AT = x$, $TB = y$. Le triangle rectangle BPT donne (en ſuppoſant le rayon $= r$), $r : a :: y : BP = \frac{ay}{r}$, $r : c :: y : PT = \frac{cy}{r}$; donc $AP = x - \frac{cy}{r}$; c'eſt pourquoi en mettant dans les formules ci-deſſus $x - \frac{cy}{r}$ au lieu de x, $\frac{ay}{r}$ au lieu de y (*), vous aurez les valeurs données en

(*) Au lieu de dx, on mettra la différentielle de $x - \frac{cy}{r}$; au lieu de $d\,dx$, on mettra la ſeconde différentielle de la même quantité; au lieu de dy, ddy, l'on mettra $\frac{a\,dy}{r}$, $\frac{a\,ddy}{r}$.

AT & BT. Ayant fait les ſubſtitutions, l'on a $R = \frac{r\,ds^3}{a.(dy\,ddx - dx\,ddy)}$, $CN = \frac{(r\,dx - c\,dy)\,ds^2}{a\,(dy\,ddx - dx\,ddy)}$, $NQ = \frac{dy\,ds^2}{dy\,ddx - dx\,ddy}$.

Sans faire mention de différentes autres méthodes par leſquelles on peut trouver des formules pour le rayon oſculateur, nous en donnerons une, par le moyen de laquelle on évite les différences ſecondes.

Soit la courbe PC, rapportée à ſon axe AR (fig. 68), en ſuppoſant les ordonnées perpendiculaires aux abſciſſes, qu'on tire les lignes CQ, DQ perpendiculaires à l'arc infiniment petit CD, & les ordonnées CL, DR. Ayant pris Cf égale à une conſtante b, on menera par le point f la ligne fm perpendiculaire à CQ, & par conſéquent parallèle à l'arc CD, qu'on peut regarder comme une ligne droite, ce qui donnera Do = Cf; par le point o menez la ligne qt perpendiculaire à DQ, & qui rencontrera CQ en n. Cela poſé, ſoit AL = x, LC = y; donc CS = dx, DS = dy, & faiſant Cm = p, l'on aura $nm = dp$. Les triangles DSC, fmC ayant les angles S & m droits & les angles DCS, fCm égaux (car ſi des angles droits SCL, QCD l'on retranche l'angle SCm, il reſtera les deux angles dont on vient de parler), ſont ſemblables; ainſi DS : DC :: fm : fC, ou DS × fC = DC × fm. Et parce que les triangles omn, Qtn ſont ſemblables, & que Qtn eſt ſemblable à QCD, l'on a DC : mn :: QC : $om = fm$, (parce que les prdonnées CL, DR étant ſuppoſés infiniment oroches, le point o eſt cenſé ſe confondre avec le point f); donc DC × fm =

QC × mn; donc DS × fC = QC × mn, ou DS : mn :: QC : fC, ou dy : dp :: R : b; donc R = $\frac{b\,dy}{dp}$; mais les triangles ſemblables CSD, Cfm donnent p : b :: dx : ds; donc $p = \frac{b\,dx}{ds}$. Par cette formule on déterminera facilement p, & par conſéquent auſſi dp.

Si les ordonnées partent d'un point fixe F (fig. 69), ayant tiré les ordonnées qu'on voit dans la figure, la corde BCL prolongée juſqu'à la rencontre de l'arc DL décrit du point C avec le rayon CD, la tangente Cb (qui eſt cenſée égale à l'arc CD), avec les rayons oſculateurs CQ, DQ; il eſt viſible qu'en conſidérant l'arc infiniment petit BCD comme circulaire, l'angle LCD, formé par une corde & le prolongement d'une autre corde, aura pour meſure (voyez la Géométrie) la moitié de la ſomme des arcs ſous-tendus par ces cordes; & comme on peut ſuppoſer ces arcs tels qu'ils ne différent entr'eux que d'une quantité infiniment petite, par rapport à eux, cet angle aura pour meſure l'arc CD = BC, & ſera = CQD, tandis que l'angle bCD formé par la tangente, & la corde CD eſt = $\frac{\text{CQD}}{2}$.

Si on ſuppoſe que le point C de la courbe eſt le point d'où partent les ordonnées; à cauſe que l'angle LCD eſt égal à l'angle de courbure, ſi nous ſuppoſons que la meſure de l'angle DCL (priſe dans un cercle dont le rayon ſoit = 1) eſt = dx, l'on aura 1 : dx :: CD = dy (en ſuppoſant CD inaſſignable) : DL = dy. dx.

Mais les ſecteurs CQD, LCD ſont ſemblables, donc $QD = R : CD = dy :: CD\ (dy) : DL = dy.\ dx$; donc alors au pôle C l'on a $R = \frac{dy}{dx}$, ce qui eſt un cas particulier.

Suppoſons maintenant que les ordonnées partent du point F (fig. 69), ſitué comme l'on voudra par rapport à la courbe, du point F je décris l'arc $Cm = dx$, & je tire FM perpendiculaire ſur QC, les triangles FCM, DCm ont les angles M & m droits & les angles FCM, DCm égaux (*). Donc ils ſont ſemblables; ainſi en faiſant $FC = y$, l'on aura $Dm\ (dy) : DC :: FM : FC = y$. Mais ayant tiré F$t$ perpendiculaire ſur QD, les triangles FMu, Qut ſont ſemblables; donc auſſi QDC ſemblable à utQ(**), ſera ſemblable à FMu; & partant $DC : Mu = dp$ (en faiſant $CM = p$) :: CQ (R) : FM; donc puiſque les termes moyens de la premiere proportion ſont les mêmes que les extrêmes de la derniere, l'on aura $dy \times y = dp \times R$, ou $R = \frac{y\,dy}{dp}$; mais les triangles CDm, FMC donnent $FC : CM :: CD : Cm$, ou $y : p :: ds : dx$; donc $p = \frac{y\,dx}{ds}$.

Si dans la formule $R = \frac{y\,dy}{dp}$, l'on ſubſtitue la valeur de dp priſe de l'équation $p = \frac{y\,dx}{ds}$,

(*) Car ſi à chacun de ces angles l'on ajoute l'angle QCm, l'on aura les angles droits FCm, QCD.

(**) Car on peut regarder ut perpendiculaire à QD comme parallèle à CD.

qui donne $dp = \frac{dy\,dx\,ds + y\,ddx\,ds - y\,dx\,dds}{ds^2}$,

l'on aura $R = \frac{y\,dy\,ds^2}{ds(dy\,dx + y\,ddx) - y\,dx\,dds}$;

& parce que $\overline{ds}^2 = dx^2 + dy^2$ (*), & par conséquent $ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, le dénominateur de la valeur de R deviendra, en substituant la valeur de dds, qui est $\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{ds}$, deviendra, dis-je,

$= \frac{ds^2(dy\,dx + y\,ddx) - y\,dx.(dx\,ddx + dy\,ddy)}{ds}$,

ou en faisant les multiplications indiquées, substituant la valeur de ds^2 & réduisant,

$\frac{dy(dx^2 + dx\,dy^2 + y\,dy\,ddx - y\,dx\,ddy)}{ds}$; donc

en divisant $y\,dy\,ds^2$ par cette quantité, & effaçant ensuite dy, qui se trouvera au numérateur, & au dénominateur du quotient, l'on a $R = \frac{y\,ds^3}{dx^3 + dx\,dy^2 + y\,dy\,ddx - y\,dx\,ddy}$

$= \frac{y\,ds^3}{dx\,ds^2 + y\,dy\,ddx - y\,dx\,ddy}$.

Si on suppose ds constant, l'on a $ddx = 0$ & $R = \frac{y\,ds^3}{dx^3 + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}$. Si dy est constant, il vient $R = \frac{y\,ds^3}{dx^3 + dx\,dy^2 + y\,dy\,ddx}$. Si

(*) Car le triangle $Cm\,D$ est rectangle. L'expression de ds^2 est la même, lorsque les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses.

du

du point Q (fig. 70), l'on tire QN perpendiculairement sur le rayon FC, nous appellerons côtés du rayon osculateur les lignes QN & CN, QN sera appellé *le premier côté* & CN *le second côté du rayon osculateur.* Pour les déterminer, je remarque que si des angles droits FCm, QCD l'on retranche l'angle commun QCm, les restes NCQ, mCD seront égaux; donc les triangles rectangles QNC, mCD sont semblables & donnent CD: Cm :: CQ: CN, & CD: Dm :: CQ: NQ; donc 1° $CN = \frac{Cm.CQ}{CD} = \frac{y\,dx\,ds^2}{dx^3+dx\,dy^2+y\,dy\,ddx-y\,dx\,ddy}$; donc 2° $NQ = \frac{CQ.Dm}{CD} = \frac{y\,dy\,ds^2}{dx^3+dx\,dy^2+y\,dy\,ddx-y\,dx\,ddy}$; en supposant successivement dx & dy constans; ces formules deviendront plus simples. Si la valeur de R & de CN est positive, la courbe tournera sa concavité du côté du pôle; si le contraire arrive, la courbe tournera sa convexité au pôle.

Pour faire usage des formules ci-dessus, si les courbes sont rapportées à un axe, il faut éliminer l'une des variables x, ou y par le moyen de l'équation de la courbe, & l'on parviendra à une formule qui contiendra la valeur du rayon & des côtés du rayon R en termes finis. Si la courbe est rapportée à un foyer, il faut chasser dx, & trouver le rayon R & ses côtés exprimés en y.

REMARQUE. Dans les formules qui ne supposent aucune différence constante, en éliminant une des secondes différences par le moyen de

l'équation de la courbe, on éliminera toujours l'autre ſeconde différence ; de ſorte qu'en éliminant ddx, on éliminera les deux termes $dy\,ddx - dx\,ddy$. Car ſoit l'équation de la courbe $dx = q\,dy$, q étant une fonction de x & de y, l'on aura $ddx = dq.\,dy + q\,ddy$; donc $dy\,ddx = dy \times (dq.dy + q\,ddy)$, $dy\,ddx - dx\,ddy = dy \times (dq.dy + q\,ddy) - dx\,ddy = dq\,dy^2 + q\,dy\,ddy - q\,dy\,ddy$ (en ſubſtituant la valeur de dx) $= dq\,dy^2$, quantité qui ne contient aucune ſeconde différence.

Ayant trouvé le rayon oſculateur & les côtés de ce rayon, pour déterminer la développée d'une courbe BD (fig. 71), on la rapportera à ſon axe AP, & faiſant $AL = x$, $LC = y$, on aura une équation entre x & y, & de plus le rayon QC auſſi bien que ſes côtés, ſeront donnés en x & y. Le point Q étant un point de la développée, de ce point je tire $QP = q$, ordonnée à l'axe AP. q ſera donc l'ordonnée de la développée, dont l'abſciſſe ſera $AP = p$; & parce que $NQ = LP$ & $LN = CL - CN = y - CN$, l'on aura deux autres équations $p = x + QN$, $q = y - CN$, dans leſquelles QN, CN ſont donnés en x & y. L'on a donc trois équations ; & ſi par le moyen de deux de ces équations on élimine x & y, l'on aura une équation entre p & q, qui exprimera la nature de la développée.

Si la courbe BD (fig. 70) eſt rapportée au foyer F, & qu'on ait l'équation entre $FC = y$ & $Cm = dx$, on pourra avoir le rayon oſculateur & les côtés de ce rayon exprimés en y. Ayant prolongé le rayon DQ juſqu'en P, de maniere que P ſoit le centre de l'arc, ſuivant Db,

la développée paſſera par les points Q & P. Je mene les lignes FQ (rayon de l'arc QM) & FP, Je fais FQ = p, QM = dq; il faut trouver une équation entre p & dq. La ligne PQ eſt la différence entre le rayon de l'arc CD & celui de l'arc Db; donc cette ligne eſt la différentielle du rayon oſculateur. D'autre côté MP = dp, & de plus le triangle rectangle QMP donne PQ, ou la différentielle du rayon oſculateur, ou la différentielle de la développée = $\sqrt{dp^2 + dq^2}$. D'ailleurs FQ = $p = \sqrt{(FN)^2 + (QN)^2}$, ou (parce que FN = y — CN), $p = \sqrt{(y - CN)^2 + QN)^2}$; mais CN & QN ſont cenſés donnés en y; donc on aura deux équations avec trois inconnues y, p, dq; & en éliminant y, on aura une équation entre p & dq, qui appartiendra à la développée.

104. PROBLÊME. *Trouver le rayon oſculateur de la parabole vulgaire A C (fig. 72).* Je prends la formule $R = \frac{b\,dy}{dp}$, dans laquelle $p = \frac{b\,dx}{ds}$, & je cherche d'abord la valeur de p. Soit le paramêtre de la parabole = $2a$, l'équation de cette courbe ſera $2ax = yy$; donc $2a\,dx = 2y\,dy$, $dx = \frac{y\,dy}{a}$, & $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, ſera $= \sqrt{\left(\frac{y^2\,dy^2}{aa} + dy^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{yy\,dy^2 + aa\,dy^2}{aa}\right)}$ $= \frac{dy}{a}\sqrt{(y^2 + aa)}$; ainſi $p = \frac{b\,dx}{ds} = \frac{by}{\sqrt{(yy + aa)}}$; donc $dp = \frac{b\,dy}{\sqrt{(yy + aa)}}$

$-\frac{by^2dy}{(yy+aa)^{\frac{1}{2}}}$ (*) $=\frac{aabdy}{(yy+aa)^{\frac{3}{2}}}$; donc $R=\frac{bdy}{dp}$ $=\frac{(yy+aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}$. Or a eſt la moitié du paramêtre; donc la ſous-normale $LP=a$. De plus $\sqrt{(yy+aa)}$ eſt la normale; ainſi le rayon oſculateur de la parabole eſt égal au cube de la normale diviſé par le quarré de la moitié du paramêtre.

Pour déterminer la développée de la parabole, je cherche les côtés CN & NQ. Ayant tiré la ligne CQ perpendiculaire à la tangente au point C correſpondant à l'ordonnée LC & égale à la quantité que nous venons de trouver, les triangles rectangles CLP, CNQ donneront $CP : CL :: CQ : CN = \frac{CQ \times CL}{CP} = \frac{y.(yy+aa)}{aa}$. Les mêmes triangles donnent $CL : CN :: LP : NQ = \frac{CN.LP}{CL} = \frac{yy+aa}{a}$; de-là on tire les équations ſuivantes $p=x+NQ$ (**) $=x+\frac{yy+aa}{a}=\frac{yy}{2a}+\frac{yy+aa}{a}$ (***), ou $2ap=3yy+2aa$ (A), $q=CN-y=\frac{y.(yy+aa)}{aa}-y=\frac{y^3}{aa}$, ou $aaq=y^3$. Je multiplie l'équation A par y, & je la diſpoſe ainſi $2ay.(p-a)$

(*) On prend la différentielle en faiſant varier d'abord le numérateur & enſuite le dénominateur, qu'on peut faire paſſer au numérateur en lui donnant l'expoſant $-\frac{1}{2}$.

(**) On a parlé ci-deſſus de cette équation.

(***) Car l'équation $2ax=yy$ donne $x=\frac{yy}{2a}$.

$= 3y^3$; donc $2ay.(p-a) = 3aaq$, ou $2y.(p-a) = 3aq$, & $y^3 = \frac{27}{8} \times \frac{a^3 q^3}{(p-a)^3}$. Substituant cette valeur de y^3 dans l'équation $aaq = y^3$, il vient $a^2 q = \frac{27.a^3 q^3}{8.(p-a)^3}$, ou $\overline{p-a}^3 = \frac{27a}{8} \times q^2$, équation à la seconde parabole cubique, que l'on peut construire de la maniere suivante. Je prends AM $= a$ (c'est le demi-paramêtre de la parabole proposée), & regardant MR comme l'axe des abscisses, je fais le quarré de chaque ordonnée RQ égal au cube de $p-a$ ou égal au cube de MR divisé par le paramêtre $\frac{27a}{8}$; de-là on peut conclure 1° que CQ est $= a$ lorsque $y = 0$, c'est-à-dire, au sommet A de la parabole; donc au sommet de la parabole le rayon osculateur est égal au demi-paramêtre. 2°. L'on peut avoir facilement la rectification de la seconde parabole cubique, puisque l'arc MQ est égal à la différence entre le rayon osculateur CQ & la ligne AM; donc l'arc $MQ = \frac{(yy+aa)^{\frac{3}{2}}}{aa} - a$; mais $yy = \frac{2ap-2aa}{3}$; donc $MQ = \frac{(2ap+aa)^{\frac{3}{2}}}{aa\sqrt{27}} - a$.

REMARQUE. La branche AF aura pour développée la branche MS, & la seconde parabole cubique a un point de rebroussement M correspondant au plus petit rayon osculateur MA; & si l'on compte les co-ordonnées depuis le point M, & que l'on fasse $MR = p - a = y$, les abscisses (comptées sur la ligne bM) $RQ = Mb = x$, le paramêtre $= g$, l'on aura $y^3 = gx^2$,

équation de la développée. Et il eſt aiſé de voir que toutes les courbes qui ont un point de plus grande courbure ou de plus petite courbure, ont une développée qui a deux branches, & que le point de cette développée correſpondant au plus grand ou au plus petit rayon oſculateur, eſt un point de rebrouſſement.

Ce que nous venons de dire ſuffit pour faire ſentir la vérité de cette propoſition, dans le cas que le rayon oſculateur eſt un *minimum*. Ce que nous allons dire ſur la développée de l'ellipſe, pourra faire comprendre la vérité de la propoſition, lorſque le rayon oſculateur eſt un *maximum*.

105. PROBLÈME. *Trouver le rayon oſculateur de l'ellipſe & de l'hyperbole* (*fig.* 73 & 74). Soit l'axe $= a$, le paramètre $= p$ l'abſciſſe AL $= x$; donc on aura $y^2 = px \mp \frac{pxx}{a}$, & $y = \sqrt{(px \mp \frac{pxx}{a})}$. Différenciant, l'on trouvera la valeur de dy, & différenciant encore, dans la ſuppoſition de dx conſtant, l'on aura la valeur de ddy. Subſtituant ces valeurs dans la formule ci-deſſus (103) $\frac{ds^3}{-dx\,ddy}$, en ſe ſouvenant que $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, on trouvera R $=$

$$\frac{(aapp \mp 4appx + 4ppxx + 4a^2px \mp 4apx^2) \times \sqrt{(a^2p^2 \mp 4appx + 4ppxx + 4aapx \mp 4apx^2)}}{2a^3p^2}.$$

Mais en cherchant la valeur de la normale, qui (34) eſt $= \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$, l'on a, dis-je, cette normale $=$

$$\frac{\sqrt{(a^2p^2 \mp 4appx + 4ppxx + 4aapx \mp 4apx^2)}}{2a},$$

quantité que je fais $= m$. Si l'on éleve cette quantité au cube, qu'on la diviſe par p^2 & que l'on la multiplie par 4, ou, ce qui revient au même, ſi on diviſe le cube de cette quantité par $\frac{1}{4}p^2$, l'on aura $R = \frac{m^3}{\frac{1}{4}p^2}$; donc dans l'ellipſe & l'hyperbole, le rayon oſculateur eſt égal au cube de la normale, diviſé par le quarré de la moitié du paramêtre.

Dans le cercle la normale & le demi-paramêtre ſont égaux au rayon; donc dans le cercle le rayon oſculateur eſt égal au rayon du cercle, & la développée du cercle eſt un point qui n'eſt autre choſe que le centre du cercle.

COROLLAIRE I. Il ſuit de-là & du n°. 104, que dans toute ſection conique le rayon oſculateur eſt égal au cube de la normale diviſé par le quarré du demi-paramêtre.

COROLLAIRE II. Si on ſuppoſe $x = 0$, l'on a $R = \frac{(aapp)\sqrt{(a^2p^2)}}{2a^3p^2} = \frac{a^3p^3}{2a^3p^2} = \frac{1}{2}p$; donc au ſommet A le rayon oſculateur de l'ellipſe & de l'hyperbole ſera égal au demi-paramêtre, & parce que dans la parabole (104) l'on a $R = \frac{(yy+aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}$, & qu'au ſommet A (fig. 72) $y = 0$, l'on aura $R = \frac{(aa)^{\frac{3}{2}}}{aa} = a$; mais a eſt ici le demi-paramêtre; donc la même choſe a lieu pour la parabole.

COROLLAIRE III. Si on ſuppoſe $x = \frac{1}{2}a$, l'on aura dans l'ellipſe (fig. 73) $R = DM = \frac{a\sqrt{ap}}{2p}$; mais en faiſant le petit axe $= b$, l'on

l'on a (voyez les ſections coniques) $a : b :: b : p$, ou $bb = ap$ & $b = \sqrt{ap}$. Donc ſi on fait $2p : a :: b :$ DM, le point M ſera un point de la développée, & ſera en même temps un point de rebrouſſement. Si on développoit l'ellipſe entiere, la développée (fig. 75) auroit quatre branches égales.

106. PROBLÊME. *Trouver le rayon oſculateur de la cycloïde A D a (fig. 76).* Faiſant l'arc de cercle D N $= z$, l'on aura PC $= y =$ PN $+ z = \mathit{ſin.}\ z + z$, & $dy = d.\mathit{ſin.}\ z + dz$.

Suppoſant le rayon $= 1$, DP $= x$, l'on a par la nature du cercle, PN $= \sqrt{(2x - xx)}$; donc $d.\text{PN} = d.\mathit{ſin.}\ z = d.\sqrt{(2x - xx)} = \frac{dx - x\,dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$. Mais (27) la différentielle du *ſinus* d'un arc dont le rayon $= 1$ eſt égal à la différentielle de l'arc, multipliée par le *coſinus* de l'arc, & ici le *coſinus* RP $= 1 - x$; donc la différentielle de *ſinus* z eſt $= dz.\ (1 - x)$, & $dz = \frac{d.\mathit{ſin.}\ z}{1 - x} = \frac{(1 - x).dx}{(1 - x).\sqrt{(2x - xx)}} = \frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$; donc dy eſt $= \frac{(2 - x)\,dx}{\sqrt{x}.\sqrt{(2 - x)}} = \frac{dx.\sqrt{(2 - x)}}{\sqrt{x}} = \frac{dx}{x} \times \sqrt{(2x - xx)}$, & $ddy = \frac{-dx^2}{x.\sqrt{(2x - xx)}}$ (en ſuppoſant dx conſtant); donc $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{2\,dx^2}{x}$, & R $=$ CQ $= \frac{ds^3}{-dx\,ddy}$, en ſuppoſant dx conſtant, devient $= 2.\sqrt{2.(2 - x)}$; or la corde FN (voyez la Géométrie) eſt moyenne

proportionnelle entre le diamètre & la partie FP; donc CQ = 2. FN; mais, selon ce qu'on a dit ci-dessus (13), DN est parallèle à la tangente C*m*, & de plus NF est perpendiculaire à DN, tandis que CQ est perpendiculaire à C*m*; donc FN = C*n* = *n* Q; c'est-à-dire que prenant une ligne CQ parallèle à la corde FN & double de cette corde, le point Q sera à la développée: cette courbe passe par le point A, auquel le rayon osculateur est = 0.

Pour déterminer la développée, je remarque que le rayon DM correspondant au milieu de la cycloïde, doit être double du diamètre du cercle générateur; donc faisant le rectangle AB *ab*, le diamètre du demi-cercle ASB sera = FD; & parce que C*n* = *n* Q, les parallèles *pf*, PC seront également éloignées de A*a*, les arcs AS, NF compris entre ces parallèles également éloignées, seront égaux, & leurs cordes seront aussi égales; donc les angles AFN, *n* AS, formés par la tangente AF & ces cordes, seront égaux; ainsi AS sera parallèle à *n*Q & à FN. De plus, on aura A*n* = SQ; mais l'arc DN = CN = *n*F; donc A*n* est égale à l'arc FN; donc l'arc NF = SQ; donc l'arc AS est égal à l'ordonnée correspondante SQ, propriété distinctive de la cycloïde; & partant la courbe AQM est une demi-cycloïde.

COROLLAIRE. Donc 1°. la longueur de la demi-cycloïde est double du diamètre du cercle générateur, & la cycloïde entiere est quadruple du diamètre du cercle générateur. Donc 2°. la développée de la cycloïde est encore une cycloïde; mais dans une situation renversée, & l'on voit que la développée a un point de rebroussement en M, &

qu'elle eſt formée de deux demi-cycloïdes égales chacune à la moitié de la cycloïde A D a (*).

107. PROBLÈME. *Déterminer le rayon oſculateur de l'hyperbole équilatère rapportée à ſes aſymptotes.* Soit ſuppoſée A B = B D = a (fig. 77), A L = x, L C = y; l'on aura $xy = aa$. Donc en prenant les différentielles, $x\,dy + y\,dx = 0$; & différenciant de nouveau en regardant dx comme conſtant, l'on aura $ddy = \frac{-2\,dx\,dy}{x}$. Subſtituant cette valeur dans la formule du côté C N = $\frac{-ds^2}{ddy}$, dans la même hypothèſe, l'on trouvera C N = $\frac{x\,ds^2}{2\,dx\,dy} = \frac{x(dx^2+dy^2)}{2\,dx\,dy}$. Mais l'équation $x\,dy + y\,dx = 0$

(*) La cycloïde étant une courbe qu'on rencontre aſſez ſouvent dans l'analyſe, & dont l'équation peut ſe préſenter ſous différentes formes, nous croyons devoir parler de quelques-unes. Soit l'arc de cercle D N = x, le diamètre D F = $2r$; l'ordonnée C P de la cycloïde étant = P N + N C = $x + \mathit{ſin.}\ x$, l'on aura P C = $y = x + \mathit{ſin.}\ x$. Mais en faiſant D P = x, l'arc D N ſera = S. $\frac{r.dx}{\sqrt{(2rx-xx)}}$, & l'on aura P C = y = P N + N C = $\sqrt{(2rx-xx)}$ + S. $\frac{r\,dx}{\sqrt{(2rx-xx)}}$, & en prenant les différences, $dy = \frac{r\,dx - x\,dx}{\sqrt{(2r.\,x-xx)}} + \frac{r\,dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = \frac{(2r-x).dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = \frac{dx\sqrt{(2r-x)}}{\sqrt{x}}$. Mais en comptant les abſciſſes du centre R du cercle générateur & faiſant R P = x; à cauſe que $2r - x$ = F P eſt = $r + x$, & que D P = $r - x$, l'on a $dy = \frac{-dx\sqrt{(r+x)}}{\sqrt{(r-x)}}$. Si l'on fait F P = x, l'on aura $dy = \frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{(2r-x)}}$.

donne $dy = \frac{-y\,dx}{x}$; donc $CN = \frac{x^2+y^2}{-2y}$; & puiſque cette quantité eſt négative, il faut prendre CN du côté oppoſé à la ligne des abſciſſes. Menez AC & faites ſon prolongement $CE = \frac{AC}{2}$; menez-lui la perpendiculaire EN qui rencontrera LC (prolongée) en N, le côté CN ſera par là déterminé. En effet les triangles ſemblables ACL, NCE donnent $CL : CA :: CE : CN$, ou $y : \sqrt{(xx+y)} :: \frac{\sqrt{[xx+yy]}}{2} : CN = \frac{xx+yy}{2y}$, qui eſt la valeur qu'on a trouvée ci-deſſus, en n'ayant pas égard au ſigne qui ne ſert qu'à indiquer la poſition de CN.

Maintenant tirant CQ perpendiculaire à la courbe & NQ parallèle aux abſciſſes, le point Q, où ces lignes ſe rencontreront, ſera un point de la développée. Pour avoir le point P de la développée, correſpondant au point D ſommet de la courbe, on remarquera que AD eſt normale à la courbe; donc prenant $DK = \frac{AD}{2}$, menant KH perpendiculaire à DK & HP parallèle aux abſciſſes, le point P où cette ligne rencontre le prolongement de AD, ſera le point cherché. Il eſt évident que PD eſt $=$ AD, & que $HD = BD$.

108. PROBLÈME. *Déterminer le rayon de la ſpirale logarithmique* (*fig.* 78). Soit F le foyer, par la propriété de cette courbe (30), l'angle FDT que fait le rayon avec la tangente, eſt toujours conſtant. Donc en faiſant l'arc Dm décrit du foyer avec le rayon variable $DF(y) = dx$, le *ſinus* de l'angle $DCm = a$, ſon *coſinus* $= b$, l'on aura (à cauſe du triangle rectangle $Dm C$), l'on aura, dis-je, $Dm = dx : Cm = dy :: a : b$; donc $dx = \frac{a\,dy}{b}$ (*).

Je prends la formule du rayon $R = \frac{y\,dy}{dp}$, p étant $= \frac{y\,dx}{ds}$; mais le triangle rectangle $DC m$ donne (en ſup-

(*) dx eſt un arc décrit avec rayon variable, au lieu qu'on a ſuppoſé ci-deſſus (30) que le rayon de l'arc dx étoit conſtant.

posant le rayon $= r$), $ds : r :: dy : b$. Ainsi $ds = \frac{r\,dy}{b}$; donc $p = \frac{y\,a}{r}$, & $dp = \frac{a\,dy}{r}$; donc $R = \frac{ry}{a}$. Pour construire R; du point F, menez FQ perpendiculaire à DF jusqu'à la rencontre de la normale DQ, le point Q sera à la développée: car on aura $a : r :: y : DQ = \frac{ry}{a}$. Puisque l'angle QDT est droit, il sera égal aux deux angles DQF + QDF, qui valent un angle droit, parce que le triangle DFQ est rectangle; donc en retranchant l'angle commun QDF, l'on aura DQF = FDT. Ainsi la ligne FQ fera toujours avec le rayon osculateur un angle égal à celui que fait le rayon de la courbe avec sa tangente, je fais cet angle $= c$. Mais le rayon osculateur QD est tangente de la développée; donc les lignes qui partent du point F font avec la développée un angle constant c; donc la développée est elle-même une spirale logarithmique égale à la développante ou à la courbe de développement, & l'arc FQ de la développée est égal au rayon DQ, quoique cette courbe fasse une infinité de révolutions avant d'arriver au foyer F.

REMARQUE. Si l'on prend un rayon FP = FQ & que l'on conçoive que la spirale logarithmique tourne sur le point F jusqu'à ce que le rayon FP, après avoir décrit l'angle PFQ, se confonde avec FQ, on aura la position de la développée.

Il suit de ce qu'on vient de dire, que la spirale logarithmique produit, en se développant, une autre spirale logarithmique située dans une position droite.

109. PROBLÈME. *Déterminer le rayon osculateur de la spirale dont l'équation est* $d\bullet = \frac{dy\sqrt{[yy - bb]}}{b}$. L'on aura $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{y\,dy}{b}$. Je me sers de la formule qui ne suppose aucune différentielle constante & prenant la différentielle de dx, j'ai $ddx = \frac{y\,dy^2}{b\sqrt{[yy - bb]}} + \frac{ddy\sqrt{[yy - bb]}}{b}$. Substituant ces valeurs de ds, dx, ddx dans la formule ci-dessus pour les courbes dont le ordonnées partent d'un point, l'on a $R = \frac{y\,ds^3}{dx^3 + dx\,dy^2 + y\,dy\,ddx - y\,dx\,ddy} = \sqrt{(yy - bb)}$.

Soit B C D M (fig. 79) la courbe cherchée, qu'on mene la perpendieulaire C Q à la courbe & du foyer F la ligne F Q perpendiculaire à C Q ; que du point F avec le rayon F C, on décrive l'arc C $m = dx$. Si des angles droits Q C D, F C m on retranche l'angle Q C m, l'on aura mC D = F C Q ; donc les triangles mC D, F C Q sont ſemblables ; donc C D $= ds$: D $m = dy$ :: F C $= y$: F Q ; donc $ds = \frac{y\,dy}{FQ}$. Mais nous avons trouvé $ds = \frac{y\,dy}{b}$; donc F Q $= b$; ainſi les perpendiculaires tirées du foyer F ſur les rayons oſculateurs, ſont conſtantes & $= b$. Du point F avec le rayon F Q $= b$, décrivez un cercle, les centres de tous les rayons oſculateurs ſeront ſitués ſur la circonférence de ce cercle ; car on aura toujours R $= CQ = \sqrt{(FC)^2 - (QF)^2} = \sqrt{(yy - bb)}$; c'eſt pourquoi la développée de la courbe propoſée eſt un cercle.

110. PROBLÈME. *Trouver le rayon oſculateur de la logarithmique M D (fig. 80).* Soit l'abſciſſe A P $= x$, l'ordonnée P C $= y$, la ſous-tangente de cette courbe étant conſtante, ſi on la ſuppoſe $= a$, l'on aura (21) $\frac{y\,dx}{dy} = a$, ou $dy = \frac{y\,dx}{a}$, $dy^2 = \frac{yy\,dx^2}{aa}$; & ſuppoſant dx conſtant, il viendra $ddy = \frac{dy\,dx}{a} = \frac{y\,dx^2}{aa}$; donc en ſubſtituant les valeurs de dy^2 & de ddy dans la formule $\frac{-ds^3}{dx\,ddy}$, l'on aura R $= \frac{(aa+yy)\sqrt{(aa+yy)}}{-ay}$. Cette valeur étant négative, l'on prendra R $=$ C Q du côté oppoſé à l'axe. La logarithmique a un point de plus grande courbure, auquel répond le plus petit rayon. Pour trouver ce point, on cherchera le point Q, auquel la développée a un point de rebrouſſement, en faiſant la différence de R $= 0$: ce qui donnera $a^2 = 2y^2$, ou $y^2 = \frac{a^2}{2}$, & $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ (*) ; donc ſi on prend P C $= a\sqrt{\frac{1}{2}}$, l'on aura le point C, auquel répond le plus petit rayon oſculateur ; de

(*) Les commençans pourront s'exercer à faire le calcul, qui n'eſt pas difficile.

maniere que la courbe Q B ſera la développée de la partie C N, la courbe Q *b* étant la développée de la partie C M. Si ſur le diamêtre P T = *a*, on décrit un demi-cercle P *m* T, & qu'on prenne *m* T = *m* P, le triangle rectangle P *m* T donnera (P T)² = *aa* = (*m* P)² + (T *m*)² = 2. (P *m*)², & P *m* = *a* $\sqrt{\frac{1}{2}}$; donc en ſuppoſant l'ordonnée P C = P *m*, le point C ſera le point cherché.

III. PROBLÊME. *Trouver le rayon oſculateur de la tractrice* (*fig.* 81). Dans cette courbe (dont nous parlerons dans le calcul intégral), la tangente eſt conſtante (34), je la fais = *a*. Par les points infiniment proches C & D, je mene les perpendiculaires à la courbe C Q, D Q, qui ſe rencontrent en Q; il s'agit de déterminer C Q = R. Qu'on mene les tangentes C T, D *t*; en prolongeant cette derniere tangente elle rencontrera la premiere en *h*. Du point *h*, comme centre avec le rayon *h t*, je décris l'arc *tf*, qui coupe en *f* le prolongement de C T. Puiſque la tangente de la tractrice eſt conſtante, l'on a C T = D *t*. Donc C T + *h* D = *h t* = *h f*. Ainſi en retranchant de part & d'autre la quantité *h* T, l'on aura C *h* + D *k* = T *f*; mais l'arc C D étant infiniment petit, l'on a C *h* + D *h* = C D; donc C D = T *f*. Puiſque (ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus), l'angle C Q D eſt = *t h f*, les ſecteurs Q C D, *fht* ſont ſemblables, & l'on a C Q : *h t* = C T (car ces quantités ne peuvent différer qu'infiniment peu) :: C D = T *f* : *tf*; donc ayant mené Q T, les triangles rectangles Q C T, *f* T *t* ayant les côtés qui comprennent l'angle droit proportionnels, feront ſemblables, & l'angle C Q T ſera = *t* T *f*; mais les angles C Q T, C T Q valent un angle droit; donc *t* T *f* ou C T P avec Q T C valent auſſi un angle droit; donc l'angle Q T P eſt droit, & Q T eſt perpendiculaire à l'axe B T; donc pour déterminer

le rayon oſculateur correſpondant au point C, l'on menera CQ perpendiculaire & CT tangente à la courbe, & du point T, où la tangente rencontre l'axe, une perpendiculaire à cet axe, qui rencontrera la normale CQ au point Q, centre du cercle oſculateur.

Pour déterminer ſa développée, je prolonge QC juſqu'à la rencontre de l'axe en m, & je mene l'ordonnée CP. Je fais BT (le point B répond à l'origine de la courbe, auquel point l'on a AB $= CT = a) = p$, $TQ = q$, l'on a $\overline{CQ}^2 = \overline{QT}^2 - \overline{CT}^2$, ou $CQ = \sqrt{(qq - aa)}$. Puiſque CQ eſt tangente en Q de la développée AQ, Tm ſera une ſous-tangente, & par conſéquent $= \frac{q\,dp}{dq}$ (*). De plus les triangles ſemblables donnent QT : Tm :: CP : Pm :: PT : CP. Mais les triangles CTP, QTC étant ſemblables au triangle t T f, ſont ſemblables entr'eux; donc PT : PC :: CQ : CT; donc QT : Tm :: QC : CT, ou $q : \frac{q\,dp}{dq} :: \sqrt{(qq - aa)} : a$; d'où l'on tire $dp = \frac{a\,dq}{\sqrt{(qq - aa)}}$, équation de la courbe des *coſinus* hyperboliques. Nous en parlerons ailleurs.

REMARQUE. Soit z une fonction quelconque de x & de y, ds l'élément de l'arc d'une courbe dans laquelle $dx = z\,dy$. On ſait que le rayon oſculateur eſt $= \frac{ds^3}{dy\,d\,dx}$, en ſuppoſant dy conſtant;

(*) Cette formule devient $\frac{y\,dx}{dy}$, en faiſant $q = y$ & $p = x$.

& puiſque $dx = z\,dy$, le rayon oſculateur ſera $\frac{ds^3}{dy^2\,dz}$; car alors $ddx = d\,z\,dy$ (en ſuppoſant toujours dy conſtant), d'où l'on peut tirer cette conſtruction générale pour une courbe algébrique ou tranſcendente quelconque.

Soit la courbe AC (fig. 81. A), dont on demande le rayon de courbure au point C, tirez les lignes qu'on voit dans la figure; c'eſt-à-dire, après avoir mené la tangente au point C, par le point f où cette tangente rencontre l'axe fD, élevez la perpendiculaire fg juſqu'à la rencontre de la normale (à la courbe) prolongée en g ; & parce qu'on eſt ſuppoſé connoître la tangente, ſous-tangente, la normale & ſous-normale de cette courbe, conſtruiſez une nouvelle courbe mL; de maniere que ſon ordonnée mb ſoit quatriéme proportionnelle à l'ordonnée bC de la premiere, à ſa ſous-tangente fb & à une conſtante n, priſe arbitrairement, pour avoir $b\,C = y : bf = \frac{y\,dx}{dy} :: n : b\,m = \frac{n\,dx}{dy}$, ce qui donne $d.\,b\,m = \frac{n\,d\,dx}{dy} = \frac{n\,d\,z\,dy}{dy} = n\,dz$, en ſuppoſant dy conſtant. On connoîtra donc cette nouvelle courbe & ſes tangentes, ſous-tangentes, &c. Faites fb: Nb :: gD: CF, je dis que CF ſera le rayon cherché. Car par conſtruction, $CF = \frac{Nb \times gD}{fb} = \frac{Nb.Cf.Df}{fb.Cb}$, à cauſe des triangles ſemblables gDf, fCb. Mais à cauſe des triangles ſemblables DfC, Cfb,

Cfb, l'on a $\frac{Nb.Cf.Df}{fb.Cb} = \frac{Nb \times (Cf)^3}{(fb)^2 \times Cb} =$ $\frac{Nb \times (Cf)^3 \times n}{fb \times (Cb)^2 \times bm}$ (par construction) $= \frac{dx.ds.ds^2.n}{n.dz.dx.dy^2}$ (par la propriété des tangentes; car $\frac{Nb}{bm} = \frac{dx}{ndz}$ (*); $\frac{Cf}{fb} = \frac{ds}{dx}$, & $\frac{Cf}{Cb} = \frac{ds}{dy}$) $= \frac{ds^3}{dz\,dy^2}$ (en divisant le numérateur & le dénominateur par $n\,dx$) = au rayon osculateur; donc CF est le rayon osculateur.

Soit aC la logarithmique vulgaire (fig. 81 B); Lm sera aussi une logarithmique semblable qui aura la même sous-tangente, mais dans une situation renversée & sur le même axe, de sorte que bn sera $= fb$. Car soit $bC = y$, $bf = a$, l'on aura $bm = \frac{a.n}{y}$, & de même $y = \frac{a.n}{bm}$; ainsi les courbes Lm, aC sont les mêmes, mais placées dans une situation renversée, de maniere que la plus grande ordonnée y répond à la plus petite ordonnée bm. De-là il suit que le rayon osculateur de la logarithmique aC est $= gD$; ainsi l'on a FC $= gD$.

112. PROBLÈME. *Déterminer la nature de la développée d'une demi-épicycloïde AMR (fig. 82) décrite par la révolution d'un demi-cercle MCB autour*

(*) Car les triangles semblables mhr, mbN donnent $Nb : bm :: hr : hm$, ou $\frac{Nb}{bm} = \frac{hr}{hm}$. Mais $hr = dx$ & $hm = ndz$; donc &c.

d'un cercle immobile BCR (*). Lorſque le demi-cercle générateur eſt parvenu dans la poſition BCM, c'eſt à-dire, lorſque le point décrivant A eſt arrivé en M, il eſt viſible 1° que tous les points de l'arc BSC du cercle mobile ſe ſont appliqués ſucceſſivement ſur l'arc CB du cercle immobile, & qu'ainſi ces deux arcs ſont égaux; 2° que MC eſt perpendiculaire ſur la courbe, puiſque la corde MC eſt évidemment ſituée ſur le rayon M*p* de l'arc évanouiſſant *m*M, décrit par le point M; 3° ſi du centre Q du cercle immobile l'on décrit l'arc EM, les arcs EB, MC du cercle mobile compris entre deux arcs concentriques, ſont égaux (à cauſe de la courbure uniforme du cercle), auſſi bien que leurs cordes; & les triangles QBE, QMC ayant tous leurs côtés égaux, ſont égaux en tout. Donc les angles QBE, QCM ſont égaux. Soit maintenant du centre *p*, où ſe rencontrent deux perpendiculaires à la courbe infiniment proches, décrit l'arc C*h*, & conſidérons E*i* perpendiculaire ſur EB comme un arc infiniment petit, décrit du point B avec la corde EB priſe pour rayon; les triangles rectangles C*h c*, E*i e* ſeront égaux & ſemblables; car C*c* ou R*c* — RC = E*e*, où eſt égal à l'arc B*e* — l'arc BE, puiſque les arcs BE, MC, compris entre des arcs concentriques ſont égaux, & que l'arc RC eſt égal à l'arc MC; & ſi le point M ſe trouvoit en *m*, l'on auroit l'arc R*c* égal à l'arc correſpondant MS; donc R*c* = BE*e* & C*c* = E*e*; d'ailleurs *h c* = *m c* — MC = B*e*,

(*) Quand on parle d'une figure, il n'eſt pas néceſſaire qu'elle ſoit entierement décrite; il ſuffit que la portion décrite ſoit ſuffiſante pour faire comprendre ce dont il s'agit

— BE ; puiſque me eſt cenſée égale à la corde du cercle dont l'extrémité c appuyoit ſur le cercle immobile, lorſque le point décrivant étoit en m ; donc on avoit alors $Be = mc$; donc $he = Be - BE = ie$. Les triangles eiE, hCc ont donc leurs hypothénuſes & un côté égaux de part & d'autre ; ainſi le troiſiéme côté hC d'un des triangles eſt égal au troiſiéme côté Ei de l'autre triangle (*). On vient de voir que les arcs Ei, hC ſont égaux ; mais les angles meſurés par des arcs égaux ſont en raiſon inverſe des rayons de ces angles [voyez ce qu'on a dit ci-deſſus 101] (**) ; donc l'angle $Cph : EBi :: BE : pC$.

Pour trouver le rapport de ces angles, je fais le rayon du cercle immobile $= b$, le rayon BK du cercle mobile $= a$. Il eſt évident que l'angle $EBe = QBe - QBE = Qcm - QCM$ (***) ; donc en menant uC parallèle à Qc & CL parallèle à cm, l'on aura $EBe = LCu - QCM = LCM - QCu$ (parce que les angles LCu, mcQ, dont les côtés ſont parallèles, ſont égaux, & qu'en retranchant du premier de ces angles l'angle $MCQ = MCu + QCu$, il reſte $LCM - QCu$). Mais $LCM = mpM$; donc $mpM - QCu = EBe$, ou $mpM = EBe$

(*) Car ces deux côtés ſont égaux chacun à la racine de la différence du quarré de l'hypothénuſe & de celui de l'autre côté.

(**) Car ſi deux arcs ſont égaux & que le rayon du premier ſoit double de celui de l'autre, le premier meſurera un angle ſous-double.

(***) Car puiſque Me eſt égale à la corde Be, les triangles Qmc, QBe ont tous leurs côtés égaux, & par conſéquent leurs angles ſont auſſi égaux. Il en eſt de même des triangles QCM, QEB.

$+ QCu$. D'autre côté les arcs Ee, cC ſont égaux; donc l'angle CQc: $eKE = 2.EBe$ (parce que celui-ci a ſon ſommet à la circonférence du cercle; ainſi il n'eſt que la moitié de l'angle EKe) :: $KE = a$: $QC = b$; donc l'angle $CQc = \frac{2a.EBe}{b}$; & l'angle MCL eſt $= Cph = EBe + QCu = EBe + CQc$ (parce que les angles uCQ, CQc ſont alternes, internes) $= \frac{b}{b} \times EBe + \frac{2a}{b} \times EBe = \frac{(2a+b).EBe}{b}$. Mais il eſt évident que $Cp : BE :: EBe : \frac{(2a+b)EBe}{b}$; donc $Cp = \frac{b.BE}{2a+b} = \frac{b.MC}{2a+b}$. Maintenant ſi l'on fait QA (fig. 83) $= (b + 2a) : QB = b :: MC : Cp$, le point p ſera à la développée [car (fig. 82) le point p eſt le concours des deux perpendiculaires infiniment proches mp, Mp].

De la derniere proportion, en la renverſant, compoſant & faiſant $Mp = R$, l'on déduit $R : MC :: 2b + 2a : b + 2a$; cette développée (fig. 83) commence au point R de la baſe auquel l'arc MC devient $= o$, ou, ſi l'on veut, $= \frac{1}{\infty}$, & elle ſe termine au point N; de ſorte que $QA : QB :: BA : BN$, ou $QA : AB :: QB : BN :: QA - AB = QB : QB - BN = QN$, ou $QA : QB :: QB : QN$ (*); donc les lignes QN, QB, QA ſont en proportion continue. Maintenant ſi du centre Q, l'on décrit le cercle Ntm, je dis que la développée RpN ſera

(*) On doit faire attention qu'au point B, l'on a $MC = BA$, & $Cp = BN$.

une demi-épicycloïde ſemblable à la propoſée; parce que les diamêtres NB, AB des cercles mobiles ſont dans le rapport des rayons QN, QB des cercles immobiles, mais elle eſt poſée dans une ſituation renverſée, de maniere que l'une touche ſa baſe en R & l'autre en N. Suppoſons la ligne QD = QA, *t*C = BN, & décrivons les cercles DMC, *tp*C, la droite QD paſſera par les points *t* & C, auxquels les cercles mobiles touchent les immobiles; & faiſant AB ou DC : NB ou C*t* :: MC : C*p*, le point *p* ſera à la développée, & de plus à la circonférence du cercle C*pt*. En effet l'angle DMC, appuyé ſur le diamêtre DC, eſt droit, & les triangles DCM, C*tp* ayant les côtés qui comprennent l'angle C proportionnels, ſont ſemblables; donc l'angle C*pt* eſt droit; mais cet angle eſt appuyé ſur le diamêtre C*t*; donc il eſt à la circonférence. De plus à cauſe des angles MCD, *t*C*p* égaux, l'arc DM ou ſon égal CB, eſt à l'arc *pt*, comme le diamêtre CD au diamêtre C*t* (car les arcs ſemblables ſont comme les rayons & les diamêtres) :: QC : Q*t* :: CB : N*t*; donc les arcs N*t*, *pt* ſont égaux; donc la courbe N*p*R eſt formée par le mouvement d'un point *p* de la circonférence d'un cercle C*pt*, qui roule ſur le cercle immobile N*tm*; & partant cette courbe eſt une épicycloïde.

COROLLAIRE. La courbe R*p*N, en ſe développant produit donc une demi-épicycloïde RMA, & l'arc développé R*p* étant égal au rayon oſculateur M*p*, l'on a M*p* = R*p*. Mais ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus AB : NB :: MC : C*p*, & QB : QN :: AB : BN; donc C*p* : C*p* + CM = *p*M = R*p* :: NQ : QB + QN; c'eſt-à-dire, que la tangente *p*C, compriſe entre la demi-épicycloïde NR & le cercle

BR, eſt à la longueur de la développée Rp, comme le rayon du cercle immobile de la développée, à la ſomme des rayons des deux cercles immobiles; ou en ne faiſant attention qu'à l'épicycloïde N R, comme le rayon du cercle immobile à la ſomme des diamétres des cercles mobile & immobile; car Q B + Q N = 2 Q N + N B. Donc en faiſant l'arc Rp = S, la tangente pC = n, Q N = b, N B = 2a, l'on aura n : S :: b : 2a + 2b.

Au point B, l'on a n = BN = 2a, & Mp = N A = S = $\frac{2a.(2a+2b)}{b}$; donc ſi a = b, l'on a alors S = RN = $\frac{8aa}{a}$ = 8a = 8b; c'eſt-à-dire, que la demi-épicycloïde NR eſt alors égale à quatre diamétres du cercle mobile ou de l'immobile. Par la même raiſon, ſi on fait AB = 2a & QB = b, l'on aura la longueur S de l'arc R A = $\frac{2a.(2a+2b)}{b}$.

Pour trouver l'eſpace renfermé entre la demi-épicycloïde ou la demi-roulette AMR (fig. 82) & le cercle immobile BR, je remarque que le trapeze M C h m eſt = $\frac{1}{2}$ M C. (m M + Ch) (voyez la Géom.). Or Cp = ($\frac{b}{2a+b}$ × MC): Mp = [$\frac{2a+2b}{2a+b}$ × MC (*)] :: Ch : Mm =

(*) Car Mp = Cp + CM = $\frac{b}{2a+b}$ × CM + CM = $\frac{(b+2a+b).CM}{2a+b}$ = $\frac{(2a+2b).CM.}{2a+b}$.

$\frac{(2a+2b)}{b}$ Ch; donc à cauſe de $Ch = El$ (ainſi qu'on l'a vu ci-deſſus), & de $MC = EB$, l'on aura le trapeze $MChm = \frac{(2a+3b)}{2b} \times Ei \times EB$; donc le trapeze ſera au triangle correſpondant EBi ou EBe (car ces triangles ne différent entr'eux que d'une quantité infiniment petite par rapport à eux-mêmes) comme $2a+3b : b$. Mais le triangle $EBe = \frac{1}{2}. Bi. Ei$ eſt l'élément du demi-cercle mobile, & le trapeze dont on vient de parler eſt l'élément de l'eſpace épicycloïdal cherché; donc cet eſpace eſt égal au demi-cercle mobile, multiplié par $\frac{2a+3b}{b}$.

Si $a = b$, cet eſpace ſera égal au demi-cercle mobile, que je fais $= g$, multiplié par 5, ou ſera $= 5g$, & l'eſpace entier renfermé entre l'épicycloïde & le cercle immobile, ſera $= 10\,g$ ou quintuple du cercle générateur.

Si on ſuppoſe $b = \infty$, c'eſt-à-dire, ſi on ſuppoſe le cercle immobile infini & le cercle mobile fini, alors la baſe de l'épicycloïde ne différant qu'infiniment peu d'une ligne droite, l'épicycloïde ſe change en cycloïde, qui peut être regardée comme une épicycloïde dont le rayon du cercle immobile ſeroit infini, & dans ce cas l'eſpace dont nous venons de parler devient $= \frac{3b}{b}. g = 3g$, l'eſpace cycloïdal entier eſt $= 6\,g$ ou égal au triple du cercle générateur, & l'arc RN (fig. 83) $= S$, qu'on a trouvé ci-deſſus $= \frac{2a.(2a+2b)}{b}$

devient alors $= \frac{4ab}{b} = 4a$ [car alors $2(2a + 2b)$ devient $= 4b$] ; donc la cycloïde entiere ſera $= 8a$, ou ſera quadruple du diamêtre du cercle générateur.

Si l'on ſuppoſe que le cercle mobile BEA (fig. 84) roule au dedans de l'immobile, alors on doit regarder le diamêtre $2a$ comme négatif; & ayant mené la perpendiculaire Mp à la roulette RA, l'on ſera $QA = b - 2a$ (à cauſe du diamêtre $2a$ négatif) : $QB = b :: MC : Cp = n$, & le point p ſera à le développée; donc $n = Cp : MC + Cp = Mp = Rp = S :: b : 2b - 2a$, ou $S = \frac{n.(2b-2a)}{b}$. Mais QA, QB, QN ſont en proportion continue ; donc $b - 2a : b :: b : QN = \frac{bb}{b-2a}$, & $AN = \frac{bb}{b-2a} - b + 2a = \frac{4ab - 4aa}{b-2a} = RN$.

L'on a vu ci-deſſus que $mM = \frac{(2a+2b).Ch}{b}$, & que $Ch = Ei$ (fig. 82). Or Ei eſt l'élément de la corde EA, & mM l'élément de l'arc cycloïdal Am; donc cet arc eſt égal à $\frac{(2a+2b)}{b}$. EA. Mais dans la figure 84, à cauſe de $2a$ négatif, l'on a $AM = \frac{(2b-2a).EA)}{b}$ (EM eſt un arc de cercle décrit du centre Q); donc l'arc $RA = \frac{(2b-2a)}{b} \times AB$, parce qu'ici $AE = AB$; & l'épicycloïde entiere RAD eſt double de cet

arc. L'élément $mMCh = \frac{(3b-2a)}{b} \times \frac{1}{2}BE \times$ $\frac{1}{2}E$, & l'espace $BRAM = \frac{(3b-2a).g}{b}$, en faisant l'aire du demi-cercle $BEA = g$.

REMARQUE I. L'on a pris le trapeze $mChM$ pour l'élément de l'espace BRMA, au lieu de prendre le quadrilatère Mmc C; mais il faut remarquer que le triangle Chc est infiniment petit par rapport au trapeze dont nous venons de parler. En effet les côtés Ch, ch sont infiniment petits par rapport à CM & th, Ch est un infiniment petit du second ordre; donc on peut le négliger devant $MCcm$ infiniment petit du premier ordre.

REMARQUE II. On peut conclure de ce que nous venons de dire, que les développées des épicycloïdes sont aussi des épicycloïdes, & réciproquement qu'une demi-épicycloïde, en se développant, produit une demi-épicycloïde, mais dans une situation renversée. On suppose que ce développement commence au milieu de l'épicycloïde.

113. PROBLÈME. *Trouver la courbe de l'équation* $S = \frac{n}{m}\sqrt{(CC-RR)}$, *S étant un arc de courbe, C une ligne donnée, & R le rayon osculateur de la courbe. Soit AM un arc d'épicycloïde t, le rayon osculateur correspondant au point* $M = Mp = R$ (*fig.* 85), & supposons que $AD = C$ est le rayon osculateur correspondant au point A de la courbe. Je divise AD en deux parties en B, de sorte que l'on ait C: AB:: $n+m$: n, ou $AB = \frac{nC}{n+m}$; donc $BD = C - \frac{nC}{n+m} = \frac{mC}{n+m}$. Je fais encore $n-m : m :: \frac{nC}{n+m} = AB$; $BQ = \frac{nmC}{nn-mm}$. Du point Q avec les rayons QB & QA,

je décris les cercles AF, BC, & ſur le diamètre AB, je décris le cercle AEB. Faiſant mouvoir ce dernier cercle ſur le cercle immobile BCN, le point A, qui au commencement du mouvement eſt le plus éloigné du centre Q, décrira l'arc AM d'une épicycloïde. Suppoſons que ce cercle ſoit parvenu en FMC, & tirons par le centre de ce cercle la ligne FQ = AQ; tirons encore les cordes FM tangente de l'épicycloïde, & MC perpendiculaire à l'épicycloïde. Selon ce qu'on a démontré (112) la tangente C*p* (fig. 83) compriſe entre le cercle immobile & l'épicycloïde, eſt à l'arc R*p* comme le rayon QR du cercle immobile à la ſomme des diamètres des cercles mobile & immobile; donc (fig. 85) la tangente MF eſt à l'arc AM = S :: CQ = $\frac{n\,m\,C}{n\,n - m\,m}$: AB + BN = $\frac{n\,C}{n+m}$ + $\frac{2\,n\,m\,C}{n\,n - m\,m}$ :: *m* : *n* + *m*; donc la corde MF eſt = $\frac{m\,S}{n+m}$. L'on a trouvé auſſi (112) pour la figure 83 la proportion R (c'eſt le rayon oſculateur) : MC :: 2*b* + 2*a* : *b* + 2*a* (*b* eſt le rayon du cercle immobile, *a* celui du cercle mobile, & MC la corde du cercle mobile, compriſe entre le point décrivant du cercle mobile & le point où ce cercle touche l'immobile); donc (fig. 85) R : CM :: AB + 2BQ : AB + BQ :: $\frac{n\,C}{n+m}$ + $\frac{2\,n\,m\,C}{n\,n - m\,m}$: $\frac{n\,C}{n+m}$ + $\frac{n\,m\,C}{n\,n - m\,m}$ :: *m* + *n* : *n*; donc MC = $\frac{n\,R}{n+m}$; or $(FC)^2 = (AB)^2 = (MF)^2 + (MC)^2$; donc $\frac{n^2\,C^2}{(n+m)^2} = \frac{m^2\,S^2}{(n+m)^2} + \frac{n^2\,R^2}{(n+m)^2}$; d'où l'on tire $S = \frac{n}{m} \cdot \sqrt{(C^2 - R^2)}$, équation qui réſout le problême.

Si *m* = 0, l'on a AB = $\frac{n\,C}{n+m} = \frac{n\,C}{n} = C$; les points B & D ſe confondent, DB s'évanouit, le rayon BQ du cercle immobile devient = 0, ce cercle devient un point Q, & l'on n'a alors aucune épicycloïde. Si *n* = *m*, l'on a AB =

$\frac{nC}{n+m} = \frac{C}{2}$, & $BQ = \frac{nmC}{nn-mm} = \infty$. Ainsi la base de l'épicycloïde peut alors être regardée comme une ligne droite, & l'on a une cycloïde à laquelle convient l'équation $S = \sqrt{(CC-RR)}$.

Supposons maintenant $m > n$; je fais $AD = C$ (fig. 86), & prenant $AB = \frac{nC}{m+n}$, $BQ = \frac{mnC}{mm-nn}$, je décris les cercles AFn, AEB, NCB. Supposons que le cercle mobile, en roulant au dedans de BCN, est parvenu dans la situation FMC, & que l'épicycloïde cherchée est AM. Ayant tiré $Mp = R$ & les autres lignes que la figure représente, à cause que le diamètre AB doit être pris négativement, on aura $MF : AM = S :: QB = \frac{nmC}{m^2-n^2} : BN - AB = \frac{2nmC}{m^2-n^2} - \frac{nC}{m+n} :: m : m+n$; donc $MF = \frac{mS}{m+n}$. L'on aura aussi $Mp = R : CM :: BN - AB : BQ - AB :: \frac{2mnC}{m^2-n^2} - \frac{nC}{m+n} : \frac{mnC}{m^2-n^2} - \frac{nC}{m+n} :: m+n : n$; donc $CM = \frac{nR}{m+n}$. Mais $(FC)^2 = (AB)^2 = (MC)^2 + (MF)^2$; donc $\frac{n^2C^2}{(m+n)^2} = \frac{mmSS}{(m+n)^2} + \frac{n^2R^2}{(m+n)^2}$, d'où l'on tire aussi $S = \frac{n}{m}\sqrt{(CC-RR)}$.

COROLLAIRE. Donc on peut toujours trouver une épicycloïde à laquelle convienne l'équation $S = \frac{n}{m}\sqrt{(CC-RR)}$.

114. PROBLÈME. *Trouver une courbe telle que la développée lui soit semblable.* Selon ce qu'on a dit ci-dessus (112), la développée d'une épicycloïde est aussi une épicycloïde semblable, mais située dans une position renversée, & l'on a vu aussi (108) que la développée de la spirale logarithmique étoit une spirale logarithmique, mais située dans une position droite. Si l'épicycloïde étoit une cycloïde, la développée seroit une courbe non-seulement semblable, mais égale. On sent bien qu'il faut que le développement se fasse comme cy-dessus (106), en commençant par le milieu de

la courbe, autrement cela n'auroit pas lieu. Si l'angle de la courbe avec ſon rayon étoit de 45° dans la logarithmique ſpirale (fig. 78), alors on auroit par-tout FQ = FD, & l'arc FQ de la développée égal à l'arc correſpondant FD de la développante (*).

REMARQUE. Si la courbe AD (fig. 87) ſe développe en commençant par le point A, elle produira la courbe AB; ſi elle ſe développe à commencer par le point C, elle produira la courbe CN bien différente de la courbe AB, & la partie AC, en ſe développant, à commencer par le point C, produira CM.

Des cauſtiques par réflexion & par réfraction.

115. Avant d'entrer en matiere, nous allons propoſer un lemme dont nous ferons uſage dans la ſuite.

LEMME. *Si l'on a un nombre quelconque de quantités a, b, c, e, & qu'on retranche la ſeconde de la premiere, la troiſiéme de la ſeconde, &c. la ſomme a — b + b — c + c — e de leurs différences ſera = a — e, ou ſera égale à la différence de la plus grande à la plus petite, & par conſéquent égale à la plus grande, ſi la derniere eſt = 0.*

Ce lemme eſt évident, car toutes les quantités intermédiaires ſe détruiſent par la contrariété des ſignes; donc &c.

116. Si un rayon de lumiere AB, partant du point A (fig. 88) tombe ſur une ſurface plane, *p b* ou ſur une ſurface courbe QBD, & qu'il ſe réfléchiſſe en C, de maniere que le rayon incident ſoit AB & le rayon réfléchi BC, l'angle ABM fait par le rayon incident & la ligne BM perpendiculaire à la ſurface réfléchiſſante, ſera appellé

(*) Cette propriété qu'a la ſpirale logarithmique & les épicycloïdes de produire des courbes ſemblables en ſe développant, eſt très-digne de remarque.

angle d'incidence, l'angle MAC, formé par la perpendiculaire MC & le rayon réfléchi BC, ſera appellé *angle de réflexion.*

C'eſt un fait que l'angle de réflexion eſt toujours égal à l'angle incidence; or l'angle ABM eſt complément de l'angle ABp = ABQ; car l'angle pBQ eſt infiniment petit, & l'angle MBC eſt complément de l'angle CBb = CBD; donc les angles que forment les rayons réfléchi & incident, avec la ſurface réfléchiſſante, ſont égaux entr'eux.

Si on conçoit qu'une infinité de rayons de lumière FA, FM, &c. qui partant du point F, ſe réfléchiſſent après avoir rencontré la courbe AB (fig. 89), en faiſant l'angle de réflexion égal a celui d'incidence, la courbe *b*Q que touchent les rayons réfléchis, ou la courbe *b*R (fig. 90), que touchent les prolongemens des rayons réfléchis, eſt appellée *cauſtique par réflexion.*

Si on fait la tangente AL = AF (fig. 89); & qu'on développe enſuite la ligne AQ*b*, en concevant un fil égal à la courbe *b*Q, plus à la ligne AR = L (rayon réfléchi correſpondant au point A) le point L décrira la courbe LP, telle que la tangente PQ de la cauſtique, ſera toujours égale à la portion AQ de la cauſtique plus à la ligne AL. (Si AR eſt une ligne droite, on pourra néanmoins le conſidérer comme ayant une courbure infiniment petite, & comme une partie de la courbe *b*Q). Si on conçoit les rayons incidens infiniment proches FM, F*m* & les rayons réfléchis correſpondans MQ, *m*Q, prolongés juſqu'à la rencontre de la ligne LP, & que des points F & Q comme centres, l'on décrive les arcs MN, M*n*, on aura les triangles rectangles

MN*m*, M*nm* ſemblables & égaux; car puiſque l'angle de réflexion eſt égal à celui d'incidence, l'on a N*m*M = Q*m*B; or Q*m*B = M*mn* (ſon oppoſé ou ſommet); donc ces deux triangles ſont ſemblables, & parce que d'ailleurs ils ont la même hypothénuſe, ils ſont égaux; donc N*m* = *mn*. Mais *nm* eſt la différence de PM, & *m*N celle de FM; & parce que cela a lieu en quelque endroit de la courbe que ſoit ſitué le point M, il s'enſuit que MP — LA, ou AR + RQ — MQ, ſomme de toutes les différences N*m* dans la portion de courbe AM (voyez le lemme ci-deſſus), eſt = FM — FA, ſomme de toutes les différences N *m* dans la portion de courbe AM; donc l'on a l'équation AR + RQ — MQ = FM — FA; donc l'arc RQ (de la cauſtique) eſt = FM — FA + MQ — AR; c'eſt-à-dire que l'arc RQ de la cauſtique eſt égal à la différence des rayons incidens de l'arc correſpondant AM, plus la différence de tous les rayons réfléchis; car on doit regader AR comme le rayon réfléchi correſpondant au point A; lorſque la cauſtique commence en A, le rayon eſt = 0. Si le rayon réfléchi AR (fig. 90) devoit envelopper la portion RQ de la cauſtique pour parvenir en MQ, dans ce cas on auroit RQ = FM — FA + AR — MQ, parce qu'alors la différence des rayons réfléchis eſt = RQ + QM — AR. En général la différence des rayons incidens eſt égale à la différence des rayons réfléchis, en joignant à l'un de ces derniers la portion de la cauſtique qu'il développe avant de tomber ſur l'autre. Si du point F (fig. 89 & 90), l'on décrit l'arc A*a*, il eſt évident que *a*M ſera la différence des rayons incidens; & ſi l'on ſuppoſe (fig. 91) que le point lumineux F devienne infiniment éloi-

gné, les rayons incidens ſeront cenſés parallèles, & l'arc Aa pourra être regardé comme une ligne droite perpendiculaire à ces rayons.

Il eſt viſible qu'en cherchant le concours des rayons infiniment proches MQ, mQ (fig. 89), on trouvera le point Q de la cauſtique.

117. PROBLÊME. *Etant donné un point M d'une courbe AM (fig. 92) avec le point lumineux F, trouver la longueur MQ du rayon réfléchi.* On cherchera (par quelqu'une des formules qu'on a données ci-deſſus), le rayon MC de la développée au point M, & ayant pris l'arc infiniment petit Mm, on imaginera les rayons incidens & réfléchis que repréſente la figure. Des centres F & Q on décrira les arcs Mn, MN; on menera les perpendiculaires CP, Cp, CB, Cb ſur les rayons incidens & réfléchis; on fera enſuite FM $= y$ & MP $=$ MB (parce que les angles PMC, BMC étant égaux, tous les points de la ligne CM ſont également diſtans des lignes BM, MF) $= a$. Cela poſé, il ſuit de ce qu'on a dit ci-deſſus, que les triangles M$n m$, MNm ſont égaux & que MN $=$ Mn; de plus, parce que les angles d'incidence & de réflexion ſont égaux, l'on a CP $=$ BC, Cp $=$ bC, & par conſéquent CP $-$ Cp $=$ CP $-$ CS $=$ PS $=$ CB $-$ Cb $=$ Bg. Mais les triangles FPS, FMn ſont ſemblables, auſſi bien que les triangles QMn, QBg; donc FM (y) : FP ($y-a$) :: MN : PS, ou (*componendo & invertendo*) $2y-a : y ::$ Mn $+$ PS $=$ MN $+$ Bg : Mn $=$ MN :: MQ $+$ QB $=$ MB $=$ MP $= a$: MQ $= \frac{ay}{2y-a}$,

Si la courbe étoit convexe du côté de F, y deviendroit négatif, & l'on auroit MQ $= \frac{-ay}{-2y-a}$

$= \frac{ay}{2y+a}$. Si l'on ſuppoſe y infini, alors les rayons incidens (fig. 91) ſont cenſés parallèles, & l'on a $MQ = \frac{ay}{2y} = \frac{a}{2}$.

Lorſque la courbe AM (fig. 92) eſt géométrique, l'on peut avoir géométriquement tous les points de ſa développée; l'on peut auſſi trouver, par le moyen de la courbe AMB (fig. 89), une ligne droite égale à une portion quelconque RQ de la cauſtique, qui dans ce cas eſt rectifiable.

Si la courbe AM (fig. 90) eſt convexe du côté du point lumineux F, MQ ſera $= \frac{ay}{2y+a}$, quantité qui ſera toujours poſitive; ainſi il faudra la prendre du côté où ſe termine le rayon de la développée MQ, & les rayons infiniment proches ſeront *divergens* (*).

Si (fig. 92) la courbe eſt concave du côté de F, la valeur de $MQ = \frac{ay}{2y-a}$ ſera poſitive, lorſque y ſera $> \frac{a}{2}$, négative, ſi $\frac{a}{2} < y$, & infinie, ſi $y = \frac{a}{2}$. Dans le premier cas les rayons réfléchis ſont convergens; ils ſont divergens dans le ſecond cas, & parallèles dans la troiſiéme.

Si on décrit un cercle dont le diamètre MH (fig. 93) ſoit la moitié du rayon oſculateur MC, à cauſe des triangles rectangles ſemblables, MKH,

(*) Les rayons *divergens* ſont ceux qui vont en s'écartant les uns des autres, & les rayons *convergens* ſont ceux qui vont en s'approchant les uns des autres.

MPC,

MPC, l'on aura $MK = \frac{MP}{2} = \frac{a}{2}$, comme l'on a $MH = \frac{MC}{2}$; donc ſi le point F tombe ſur le point K, c'eſt-à-dire, ſi le point F tombe ſur la circonférence du cercle, les rayons réfléchis ſeront parallèles; ils ſeront convergens, s'il tombe hors du cercle, & divergens, s'il tombe dans le cercle.

Si la courbe AM (fig. 96. A) eſt ſuppoſée une parabole ordinaire, & que le point *f*, d'où partent les rayons, ſoit le foyer de la parabole, par la propriété de cette courbe, les angles que fait la tangente avec le rayon vecteur & le diamètre correſpondant, ſeront égaux (comme on l'a vu dans les ſections coniques); donc le rayon réfléchi MQ ſera parallèle à l'axe A*f*.

Si la courbe AM (fig. 94) eſt une ellipſe, & que le point lumineux F ſoit un des foyers, le rayon réfléchi paſſera par l'autre foyer *f*; car par la propriété de cette courbe (comme on l'a vu dans les ſections coniques), les angles que forme la tangente avec les lignes tirées aux foyers, ſont égaux; donc, &c.

Si la courbe AM (fig. 95) eſt une hyperbole & que le point lumineux F ſoit un des foyers, les rayons réfléchis prolongés paſſeront par l'autre foyer *f*, & s'ils partent de *f*, leurs prolongemens paſſeront par F; cela ſuit de ce que les angles que forme la tangente avec les lignes FM, *f m* ſont égaux, ainſi qu'on l'a vu dans ſections coniques.

118. PROBLÊME. *Trouver la cauſtique par réflexion de la parabole AM (fig. 96), en ſuppoſant les rayons incidens FM parallèles entr'eux & perpendiculaires à l'axe AR de la parabole.* Puiſque les rayons ſont parallèles, on peut ſuppoſer $y = \infty$, & l'on aura

$MQ = \frac{ay}{2y-a} = \frac{ay}{2y} = \frac{a}{2}$. Du milieu H du rayon de la développée, je mene HK perpendiculaire sur $MP = a$, & tirant les autres lignes que représente la figure, l'on a (à cause des triangles semblables) MC : MH :: MP : MK :: 2 : 1 :: $a : \frac{a}{2}$; donc $MK = \frac{a}{2} = MQ$. Portant donc MK sur le rayon réfléchi MB & faisant $MQ = \frac{a}{2}$, le point Q sera à la caustique, & l'on pourra de même trouver tant de points de la caustique que l'on voudra. Au point A, le rayon de la développée est égal à la moitié du paramètre & situé sur l'axe; ainsi $MP = a$ devient alors $= 0$, & la caustique passe par le sommet A de la parabole.

Pour trouver l'équation de la caustique, je suppose l'abscisse $AR = p$, l'ordonnée $QR = q$, & prolongeant MQ jusqu'à l'axe en V, je fais $MV = z$, $Mf = y$, l'abscisse indéterminée $Af = x$, la sous-normale $fD = \frac{y\,dy}{dx}$. Maintenant à cause de l'angle fMV divisé en deux également par la ligne MD, l'on a (voyez la Géométrie) $mf : MV :: fD : DV$, ou $y : z :: \frac{y\,dy}{dx} : DV = \frac{z\,dy}{dx}$; donc $fV = fD + DV = \frac{y\,dy + z\,dy}{dx}$. Mais le triangle rectangle fMV donne $(fV)^2 = (MV)^2 - (fM)^2 = zz - yy$; donc $fV = \sqrt{(zz - yy)} = \frac{y\,dy + z\,dy}{dx}$; donc [en multipliant par dx, quarant, transposant, & divisant par $z+y$] $z\,dy^2 + y\,dy^2$

$= dx^2(z-y)$, d'où l'on tire $z = \frac{y(dy^2+dx^2)}{dx^2-dy^2}$. Substituant cette valeur de z dans celle de $fV = \frac{y\,dy+z\,dy}{dx}$, il vient $fV = \frac{2y\,dy\,dx}{dx^2-dy^2}$. Ayant mené Qm parallèle à l'axe, les triangles MQm, MfV seront semblables, & l'on aura $MV : MQ :: Mf : Mm$; or $MQ = \frac{a}{2} = \frac{MP}{2}$. Mais le côté CP du rayon osculateur, en faisant dx constant, est $= \frac{ds^3}{-ddy}$ (nous avons désigné ce côté n° 103 par CN); donc la moitié de ce côté, qui est ici $= \frac{MP}{2}$, sera $\frac{dx^2+dy^2}{-2ddy}$; donc $\frac{y(dx^2+dy^2)}{dx^2-dy^2} : \frac{dx^2+dy^2}{-2ddy} :: y : \frac{dx^2-dy^2}{2ddy} = Mm = Mf - QR = y - q$; donc $q = y + \frac{dx^2-dy^2}{-2ddy}$. De plus $Mf : Mm :: fV : mQ = fR$; donc $y : \frac{dx^2-dy^2}{-2ddy} :: \frac{2y\,dy\,dx}{dx^2-dy^2} : fR = \frac{dy\,dx}{-ddy}$; & partant $fR = AR - fA = p - x = \frac{dy\,dx}{-ddy}$, & $p = x + \frac{dy\,dx}{-ddy}$. Les expressions de p & de q peuvent servir pour toutes sortes de courbes, en employant leurs équations.

Soit le paramètre de la parabole $= 1$, l'on aura $y^2 = x$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx$; $dy^2 = \frac{1}{4} \cdot x^{-1} \cdot dx^2$, $ddy = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \cdot dx^2$, en

ſuppoſant dx conſtant. Subſtituant ces valeurs de y, dy, ddy, dans les valeurs de q & de p, il viendra

$$q = x^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{1}{2}} dx^2}{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx^2} - \frac{dx^2}{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx^2} = x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$- 2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 2 x^{\frac{1}{2}}, \text{ \& } q^2 = \frac{9}{4} x - 6 x^2 + 4 x^3.$$

Mais l'on a $p = x + \frac{dy\,dx}{-ddy} = x + \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx^2}{\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \cdot dx^2} = x + 2x = 3x$; donc $x = \frac{p}{3}$. Subſtituant cette valeur de x dans celle de q^2, l'on a $q^2 = \frac{3p}{4} - \frac{2}{3} \cdot p^2 + \frac{4}{27} \cdot p^3$. Si on multiplie les termes de cette équation par le paramètre $1 = b$ autant qu'il eſt néceſſaire pour les rendre homogenes, l'on aura $b\,q^2 = \frac{3\,b^2 p}{4} - \frac{2\,b\,p^2}{3} + \frac{4}{27} \cdot p^3$, équation de la cauſtique.

Pour trouver le point S, où la cauſtique rencontre l'axe de la courbe AM, je remarque qu'alors on a $z = MQ = \frac{a}{2} = \frac{ds^2}{-2\,ddy}$; donc $z = \frac{y \cdot (dx^2 + dy^2)}{dx^2 - dy^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{-2\,ddy}$, ou $-2y\,ddy = dx^2 - dy^2$, ou $dy^2 - 2y\,ddy = dx^2$, formule qu'on peut employer pour toutes ſortes de courbes, en ſubſtituant les valeurs de y, dy, ddy.

Dans la parabole, en ſubſtituant les valeurs de y, dy, ddy, priſes de ſon équation, & ſuppoſant le paramètre $= 1$, l'on trouvera $x = \frac{3}{4}$; c'eſt-à-dire, que ſi on prend la ligne Af égale aux trois

quarts du paramètre, le rayon réfléchi correſpondant touchera la cauſtique au point où elle coupe l'axe de la parabole.

Pour trouver le point Q de la cauſtique le plus éloigné de l'axe (fig. 96. A), je remarque que le rayon réfléchi doit être alors parallèle à l'axe; donc l'angle fMQ eſt droit; donc l'angle $fMA = QMn = 45^{\circ} = Mni$; donc $dx = dy$, c'eſt-à-dire, que le rayon réfléchi eſt parallèle à l'axe lorſque $dx = dy$.

L'équation de la parabole, en faiſant le paramètre $= 1$, donne $y^2 = x$, $2ydy = dx$, ou en ſuſtituant la valeur $x^{\frac{1}{2}}$ de y, $2x^{\frac{1}{2}}dy = dx$; & diviſant le premier membre par dy & le ſecond par dx, qui dans ce cas eſt $= dy$, il vient $2x^{\frac{1}{2}} = 1$, $x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, & $x = \frac{1}{4}$; c'eſt-à-dire, que ſi le rayon incident coupe l'axe au quart du paramêtre, ou, ce qui revient au même, ſi le rayon incident paſſe par le foyer de la parabole, le rayon réfléchi ſera parallèle à l'axe, & touchera le point le plus élevé de la cauſtique.

119. PROBLÈME. *Trouver la cauſtique par réflexion lorſque les rayons incidens FM perpendiculaires au diamètre Aa vont rencontrer la demi-circonférence ADa d'un demi-cercle (fig. 97).* Ayant tiré les rayons réfléchis MQ & les autres lignes que repréſente la figure, parce que le rayon de la développée d'un cercle eſt toujours égal au rayon de ce cercle, l'on aura $MH = \frac{MC}{2}$; & ſuppoſant HQ perpendiculaire ſur MQ, HQ ſera $= HK = \frac{MP}{2} = \frac{a}{2}$. Si le point M tombe ſur le point D, l'on aura $MQ = DB = \frac{DC}{2}$.

Mais la différence du rayon-incident qui répond au point M & de celui qui répond au point A, eſt $= PM$, & la

rayon réfléchi au point A est = o ; donc, selon ce qu'on a dit ci-dessus (116), l'arc AQ est = PM + MQ = 3 MQ, & l'arc AB = 3 DB, c'est-à-dire, que l'arc AB est triple du demi-rayon DB.

Ayant décrit du centre C l'arc BS, décrivez le cercle MQH avec le diamètre MH = CH. Puisque l'angle MQH est droit, le point Q sera à la circonférence de ce cercle ; de plus l'angle QMH est = CMP = HCB (son alterne interne) ; donc les arcs $\frac{HQ}{2}$, HB qui mesurent ces angles, sont entr'eux comme les rayons $\frac{HM}{2}$, BC des cercles HQM, BS. Mais BC est double de $\frac{HM}{2}$; donc l'arc BH est égal à l'arc HQ. Ainsi la courbe AB est formée par la révolution d'un cercle dont le diamètre est = BC = $\frac{AC}{2}$, de maniere que l'arc BH du cercle immobile est toujours égal à l'arc correspondant QH du cercle mobile ; & partant la courbe BA est un arc d'épicycloïde.

On peut voir cette courbe en faisant éclairer l'intérieur d'un vase demi-cylindrique par le lumiere du soleil.

120. PROBLÈME. *Si les rayons incidens partent de l'extrémité F du diamètre F a d'un demi-cercle, comment déterminer la nature de la caustique par réflexion (fig. 98)?* Supposant le rayon incident FM & le rayon réfléchi MQ, je mene CP perpendiculaire sur FM, l'on aura FM = y, & MP = $a = \frac{y}{2}$ (car la corde est divisée en deux parties égales par une perpendiculaire menée du centre sur la corde, comme on l'a vu dans la Géométrie) ; donc $2y = 4a$. Ainsi $MQ = \frac{ay}{2y - a} = \frac{ay}{4a - a} = \frac{ay}{3a} = \frac{y}{3}$. Prenant donc MQ égal au tiers de FM, le point Q sera à la caustique ; donc en prenant aB égal au tiers du diamètre Fa, le point B sera aussi à la caustique.

Si l'on prend Cb égal au tiers du rayon CM, & qu'on mene bi parallèle à CP, les triangles MCP, Mbi seront semblables, & l'on aura MC : Mb :: MP : Mi. Donc Mi sera les deux tiers de MP ou le tiers de FM ; donc MQ = Mi. C'est

pourquoi ſi ſur M *b* comme diamêtre l'on décrit un cercle, les angles droits Q & *i* ſeront à la circonférence de ce cercle, & de plus ce cercle ſera égal au cercle du rayon C *b*.

L'arc *b* B du demi-cercle B *b* D eſt égal à l'arc *b* Q du cercle *b* M; car l'angle M C *a* (externe au triangle iſocelle F M C) vaut les deux angles égaux M F C, F M C; donc il eſt double de l'angle F M C = C M Q. Il eſt donc égal à l'angle *i* M Q, lequel a pour meſure la moitié de l'arc *i b* Q ou l'arc *b* Q. Mais l'angle M C *a* a pour meſure l'arc B *b*; ainſi l'arc B *b* eſt égal à l'arc *b* Q; & partant la cauſtique B Q F eſt une épicycloïde formée par la révolution d'un point Q d'un cercle M *i b*, qui tourne ſur un cercle égal B *b* D.

121. PROBLÈME. *Soit la courbe A D (fig. 99) une demi-cycloïde décrite par le mouvement du demi-cercle M H n ſur la ligne A B, ſoient les rayons incidens F M parallèles à l'axe B D, quelle ſera la cauſtique par réflexion?* Selon ce qu'on a dit ci-deſſus (106), en parlant du rayon oſculateur de la cycloïde, la ligne M H perpendiculaire à la courbe eſt la moitié du rayon de la développée; donc menant H Q perpendiculaire ſur le rayon réfléchi M Q, le point Q ſera à la cauſtique, & l'on aura par-tout M Q = M K; donc au point B, l'on a M Q = D B, & la cauſtique paſſe par ce point. Si du centre S du demi-cercle générateur l'on mene au point touchant H & au point décrivant M les rayons S M, S H, il eſt viſible que S H ſera perpendiculaire ſur la tangente A H, & que l'angle S M H = K M H = M H S; donc le rayon réfléchi paſſe par le centre S. Mais le cercle qui a pour diamêtre H S paſſe par le point Q, puiſque l'angle H Q S eſt droit; donc les arcs H *n*, $\frac{H Q}{2}$, qui meſurent l'angle H S *n*, ſont entr'eux comme les diamêtres M *n*, S H des cercles auxquels ces arcs appartiennent. C'eſt pourquoi à cauſe de S H = $\frac{M n}{2}$, l'arc H Q eſt = H *n* = H B; ainſi la cauſtique eſt une cycloïde décrite par la révolution entiere d'un cercle H S dont le diamêtre eſt la moitié de M *n*.

122. PROBLÈME. *Soit la courbe F M une ſpirale logarithmique, on demande la cauſtique par réflexion, en ſuppoſant que les rayons incidens F M partent du foyer F (fig. 100)?* Selon ce qu'on a dit ci-deſſus (108), ſi de l'ex-

trémité C du rayon oſculateur MC l'on mene une perpendiculaire ſur MF, elle rencontrera cette ligne au point F; donc on aura $MF = a = y$, & $MQ = \frac{ay}{2y-a} = y$; & le triangle FMQ ſera iſocelle. De plus les angles d'incidence & de réflexion étant égaux & l'angle FMQ étant diviſé en deux également par MC, qui coupe la baſe FQ du triangle MFQ en deux également & perpendiculairement, la ligne FQ ſera parallèle à la tangente MT, & les angles alternes & internes MQF, QMS = FMT ſeront égaux; donc les angles que font les lignes FQ avec les tangentes de la cauſtique, ſont égaux aux angles des rayons de la ſpirale avec la tangente. La cauſtique eſt donc une ſpirale logarithmique qui ne differe de la propoſée que par la poſition. Venons aux cauſtiques par réfraction.

123. Si un rayon de lumiere AB, en paſſant d'un milieu H (*) [fig. 88] dans un autre *p*N*b* au lieu de ſuivre ſa premiere direction A*a*, prend à l'inſtant de ſon paſſage la direction BK, en s'éloignant ou en s'approchant de la ligne BN perpendiculaire à la ſurface qui ſépare les deux milieux, ce rayon eſt dit *réfracté*, & l'angle *n*BK que fait ce rayon avec la perpendiculaire BN s'appelle *angle de réfraction*. C'eſt une loi que ſuit la lumiere que le ſinus de l'angle d'incidence ABM ou de ſon égal *n*B*a* (que nous appellerons auſſi angle d'incidence), eſt au ſinus de l'angle *n*BK de réfraction en raiſon conſtante; de ſorte que *m a* : *n*K en raiſon conſtante de *m* : *n*. Par exemple, quel que ſoit l'angle d'incidence, ſi le rayon de lumiere paſſe de l'air dans le verre, ce rapport eſt à peu-près égal à celui de 3 : 2 & égal à celui de 2 : 3, lorſque la lumiere paſſe du verre

(*) Par *milieu* on entend tout eſpace que la lumiere traverſe.

dans l'air. Nous ſuppoſerons dans la ſuite que ce rapport eſt exact.

Si le rayon réfracté BK rebrouſſoit ſon chemin, je dis qu'il prendroit la route BA par où il étoit venu; car on auroit $n : m :: nK : AM = \frac{m}{n} \cdot Kn = ma$, en ſuppoſant $BA = Ba$; or on a $AM = ma : nK :: m ; n$; donc $MA = \frac{m}{n} \cdot Kn$; donc &c.

Si une infinité de rayons BA, BM qui partent d'un point lumineux B (fig. 101) ſe refractent à la rencontre d'une ligne courbe AD, en s'approchant ou en s'éloignant des perpendiculaires MC, de maniere que le *ſinus* CE de l'angle d'incidence EMC ſoit toujours au *ſinus* CG de l'angle de réfraction, en raiſon donnée de $m : n$, la courbe NFH que touchent les rayons rompus ou leurs prolongemens AH, MF (fig. 102) eſt appellée *cauſtique par réfraction.*

Si l'on conçoit qu'un fil AH (fig. 101) enveloppe la cauſtique HN, l'extrémité A de ce fil décrira une courbe AK dont la cauſtique ſera la développée, & l'on aura l'arc FH de la cauſtique, plus la tangente FL égal à la ligne HA. Supposons une autre tangente infiniment proche F*ml* un autre rayon d'incidence B*m*, & que des points F & B pris pour centres, on décrive les arcs M*n*, M*t*, les triangles rectangles M*tm*, M*nm* ſeront ſemblables aux triangles MEC, MCG chacun à chacun. En effet ſi des angles droits EM*t*, *m*MC l'on retranche l'angle *m*ME, les angles reſtans *t*M*m*, EMC ſeront égaux. De même ſi des angles droits GM*n*, CM*m* on ôte l'angle GM*m*, les angles reſtans *m*M*n*, GMC

ſeront égaux; par conſéquent $tm : Mn :: CE : CG :: m : n$. Mais tm eſt la différentielle de BM & Mn celle de LM; donc par le lemme ci-deſſus (115) BM — BA, ſomme de toutes les différences tm dans la portion de courbe AM, eſt à ML = AH — MF — FH, ſomme de toutes les différences nm correſpondantes, comme $m : n$; donc l'on a $m : n :: BM - BA : (AH - MF - FH) = \frac{n}{m}.(BM - BA)$, d'où l'on tire $FH = AH - MF + \frac{n}{m}.BA - \frac{n}{m}.BM$.

Il y a différens cas, ſelon que le rayon incident BA eſt plus grand ou moindre que BM, & que le rayon rompu AH enveloppe ou développe l'arc HF. Mais on prouvera toujours que la différence des rayons incidens eſt à la différence des rayons rompus, en joignant à l'un d'eux l'arc de la cauſtique qu'il développe avant que de tomber ſur l'autre, comme $m : n$. Par exemple (fig. 102) $BA - BM : AH - MF - FH :: m : n$ (*); d'où il eſt facile de tirer l'équation $FH = AH - MF + \frac{n}{m}.BM - \frac{n}{m}.BA$.

Si du point B avec le rayon BA (fig. 101, l'on décrit l'arc AP, PM ſera la différence des rayons incidens BM, BA; & ſi le point B eſt infiniment éloigné de l'arc AM, les lignes BA, BM ſeront cenſées parallèles, l'arc PA ſera cenſé une

(*) Ici MF développe l'arc FH avant de tomber ſur AH.

ligne droite perpendiculaire sur les rayons incidens, & l'on aura $FH = AH - MF - \frac{n}{m}$. PM.

124 PROBLÊME. *Etant donné la courbe AD (fig. 101) le point lumineux B & le rayon incident BM, trouver sur le rayon rompu MF le point F où il touche la caustique par réfraction?* Ayant trouvé par quelqu'une des formules ci-dessus le rayon MC de la développée au point M, on prendra l'arc infiniment petit Mm; on tirera la ligne Cm; on menera les perpendiculaires CE, Ce, CG, Cg sur les rayons incidens & rompus; & l'on menera aussi les lignes données BM (y), ME (a), MG (b). & l'on décrira l'arc Mt (dx). Cela posé, les triangles semblables MEC & MRm, MGC & mnM, BMt & BQe donnent ME (a) : MG (b) :: Mt (dx) : Mn = $\frac{b\,dx}{a}$, & BM (y) : BQ ou BE (*) = ($y + a$) :: Mt = dx : Qe = $\frac{dx.(a+y)}{y}$.

Mais par la loi de la réfraction Ce : Cg :: CE : CG :: m : n; donc (*dividendo*) Ce — CE = Qe : Cg — CG = Sg :: m : n, ou m : n :: Qe = $\frac{dx.(a+y)}{y}$: Sg = $\frac{a\,n\,dx + n\,y\,dx}{my}$. De plus les triangles semblables FMn, FSg donnent Mn : Sg :: MF : FS, ou *dividendo* Mn — Sg = $\frac{(b\,m\,y\,dx - a\,n\,y\,dx - a\,a\,n\,dx)}{a\,m\,y}$: Mn = $\frac{(b\,dx)}{a}$ ::

(*) Car ces lignes ne différent que de la quantité infiniment petite QE.

$MS = MG = b$: $MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$, ce qui donne la construction suivante.

Soit fait vers CM (fig. 103) l'angle E CH = MCG, & soit prise vers le point B, la ligne $MT = \frac{aa}{y}$. Si l'on fait HT : HE :: MG : MF (V), le point F sera à la caustique par réfraction. En effet les triangles semblables CGM, CEH donnent CG : CE :: MG = b : EH; mais CG : CE :: n : m :: b : EH = $\frac{b.m}{n}$. Donc HE — ME = HM = $\frac{bm - an}{n}$, & HM — MT = HT = $\frac{bmy - any - aan}{ny}$; donc en substituant dans la proportion V les valeurs analytiques des trois premiers termes, l'on aura $(\frac{bmy - any - aan}{ny}) : \frac{bm}{n}$ :: b : MF = $\frac{bbmy}{bmy - any - aan}$.

Si la valeur de HT est négative, il est évident que celle de MF le sera aussi; donc le point M tombera entre les points G & F, lorsque le point H se trouvera entre T & E.

Si la courbe étoit concave du côté du point lumineux B (fig. 102), y deviendroit négatif, & l'on auroit $MF = \frac{-bbmy}{-bmy + any - aan} = \frac{bbmy}{bmy - any + aan}$, & la construction seroit la la même. Si l'on suppose y infini ou les rayons incidens parallèles, on aura $MF = \frac{bbmy}{bmy - any} =$

$\frac{bbm}{bm-an}$. De plus on aura (fig. 103) $MT=\frac{aa}{y}$ $=0$; donc dans ce cas on fera HM : HE :: MG : MF.

Si l'on suppose que AM soit un arc de cercle d'un rayon infini, ou si l'on suppose que AM soit une ligne droite, alors MC sera infinie, aussi bien que $ME=a$, & $MG=b$; donc la quantité $bmy-any$ disparoîtra devant aan, & l'on aura $MF=\frac{bbmy}{\mp aan}$, (le signe — a lieu pour la fig. 103 & le signe + pour la fig. 102); & faisant alors $HT=\frac{aa}{y}$, la construction sera la même.

Le rapport du *sinus* d'incidence au *sinus* de réfraction n'étant pas le même pour toutes les matieres diaphanes, avant de chercher la caustique, on doit connoître la raison de $m:n$ pour la matiere dont est composée la courbe dont on demande la caustique.

Si m est infinie par rapport à n, le rayon rompu MF tombera sur la perpendiculaire CM, & la caustique par réfraction deviendra la développée; car alors on aura $MF=b$, qui devient en ce cas $=MC$.

Si (fig. 102) le rayon incident BA est perpendiculaire sur la courbe, alors les lignes ME, MG deviendront égales entr'elles & au rayon MC; donc alors $a=b$; & supposant les ordonnées y parallèles entr'elles, l'on aura $MF=\frac{bbmy}{bmy-any}$ $=\frac{bm}{m-n}$.

125. EXEMPLE Ier. *Soit la courbe A D (fig. 104) un quart de cercle dont le centre ſoit C & les rayons incidens B M, B A parallès entr'eux & perpendiculaires ſur D C, Juppoſons de plus que m : n :: 3 : 2, on demande le rayon M F de la cauſtique ?* Tous les rayons du cercle ſe réuniſſant au centre, le point C ſera la développée du cercle ; donc ſi on décrit une demi-circonférence C E M dont le diamètre C M ſoit égal au rayon C D, & qu'on faſſe $3 : 2 :: CE : CG$, ou qu'on faſſe $CG = \frac{2}{3}. CE$, la ligne indéfinie M G ſera le rayon rompu, & l'on déterminera M F, comme il a été enſeigné ci-deſſus..

Pour trouver le point H où le rayon incident B A (prolongé) perpendiculaire au quart de cercle touche la cauſtique, on prendra la formule $\frac{bm}{m-n}$, qui devient $\frac{3b}{3-2} = 3b = 3AC$.

Si l'on décrit un demi-cercle D N C dont C D ſoit le diamètre, qu'on faſſe $CN = \frac{2}{3}. CD$, le point N ſera à la cauſtique ; car puiſque le rayon incident B D touche la courbe en D, l'on a M E (fig. 103) $= a = 0$; donc $MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$ devient $= \frac{bbmy}{bmy} = b = MG$; donc, &c.

L'arc F H (fig. 104) eſt $= AH - MF - \frac{2}{3}PM$, & la cauſtique entiere $HN = 3b - DN - \frac{2}{3}AC = 3b - \frac{2}{3}b - DN = \frac{7}{3}b - DN$. Mais $CN = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}b$, & le triangle rectangle C N D donne $(DN)^2 = b^2 - \frac{4}{9}b^2 = \frac{5}{9}b^2$, ou $DN = \frac{b\sqrt{5}}{3}$; donc $HN = \frac{b.(7-\sqrt{5})}{3}$.

126. PROBLÈME. *Déterminer la cauſtique par réfraction d'une ſpirale logarithmique, en ſuppoſant que les rayons incidens partent du pôle B de la courbe (fig. 105).* Il eſt évident qu'ici le point E tombe ſur le point B, & que $y = a$; donc MF $= \frac{bbmy}{bmy - any + aan}$ (cette expreſſion a lieu lorſque la courbe eſt concave du côté de B) devient $= b$; de ſorte que le point F tombe ſur le point G.

Ayant mené la tangente M*t*, & la ligne BG, l'angle *n*GB, ſupplément de l'angle BGM, ſera = BM*t*. En effet tirant la ligne *t*BC perpendiculaire ſur MB, le demi-cercle dont le diamètre eſt MC paſſera par B; donc les angles BG*n*, BM*t* ont chacun pour meſure la moitié de l'arc BM (*); donc l'angle BG*n* que forme la ligne BG avec la tangente MG de la cauſtique BN, eſt par-tout égal à l'angle que forme le rayon de la courbe propoſée avec ſa tangente; & partant la cauſtique eſt la même ſpirale que la courbe BM, & n'en differe que par ſa poſition.

127. PROBLÈME. *Etant donné la courbe AM avec ſa cauſtique HF qu'on peut trouver par ce qu'on a dit ci-deſſus, la ligne AH tangente de la cauſtique MF, un point b ſitué ſur AH, & les rayons incidens BM étant ſuppoſés paralleles, trouver une autre courbe Dm telle qu'elle faſſe que les rayons briſés*

(*) Car le premier angle étant formé par une corde & le prolongement d'une autre corde, a pour meſure la demi-ſomme des arcs ſou-tendus par ces deux cordes, & le ſecond arc étant formé par une tangente & une corde, a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés.

M m, en ſe refractant de nouveau, paſſent tous par le point b (*fig.* 106). Si l'on ſuppoſe que le rayon *b m* rebrouſſe ſon chemin, il ſuit de ce qu'on a dit ci-deſſus (123) qu'il ſuivra la ligne *m*M; donc ſi l'on conſidere le point *b* comme le point lumineux de la courbe D*m*, dont on prendra le point D à diſcrétion ſur la ligne AH, les prolongemens *m*F des rayons réfractés *m*M toucheront la ligne FH, qui ſera la cauſtique commune des courbes AM, D*m*. Si l'on mene la ligne AP perpendiculaire ſur BA, on aura BM — BA = *h*M.

On prendra FM = AH — FH, & ayant mené M*h* parallèle à BA, & perpendiculaire ſur AP, on prendra M*q* = $\frac{n}{m}$. *h*M, & l'on tirera MP parallèle à *h q*. Maintenant à cauſe des triangles ſemblables *h q*M, PM*m*, & de M*q* = $\frac{n}{m}$. *h*M, l'on aura *m* : *n* :: *h*M : M*q* :: P*m* : M*m* = $\frac{n}{m}$. P*m*. Donc le point *m* ainſi déterminé ſera un point de la courbe cherchée. En effet l'on aura FM = M*m* + *m*F = $\frac{n}{m}$. P*m* + *m*F = AH — FH; donc (par le n° 123) la courbe cherchée D*m* a la propriété demandée.

128. PROBLÈME. *Etant donné la courbe FH avec le point lumineux B* (*fig.* 107) *trouver une courbe AM, dont FH ſoit la cauſtique par réfraction.* Du point B je tire BH tangente de la courbe FH, & je ſuppoſe que le point A ſoit un point de la courbe cherchée. Je tire une autre tangente FM à EF, & je fais F*q* = $\frac{n}{m}$. BA + AH — FH. Je tire la ligne B*q*, je fais *m* : *n* :: *q m* : *b m*; menant *b m* = *q m* × $\frac{n}{m}$, & la ligne BM parallèlement à *b m*, le point M, où cette ligne rencontre F*q*, ſera un point de la courbe cherchée; car l'on aura *q* M : BM :: *q m* : *b m* :: *m* :

$m : n$; donc $qM = \frac{n}{m}$. BM & $qF = qM + FM = \frac{n}{m}$. BM $+ FM = \frac{n}{m}$. BA $+$ AH $-$ FH (par hypothèse); donc $\frac{n}{m}$. (BM $-$ BA) $= \frac{n}{m}$. MP $=$ AH $-$ FH $-$ FM; donc, selon ce qu'on a dit ci-dessus (123), la courbe AM, ainsi décrite, sera la courbe cherchée.

Si les rayons incidens sont parallèles entr'eux (fig. 108.), on prendra $Fq =$ AH $-$ FH & faisant $m : n :: qm : bm$, l'on menera mb parallèle à HA, & du point P où la ligne qb (prolongée s'il le faut) rencontre la ligne AP perpendiculaire à HA, on tirera la ligne PM parallèle à AH, le point M où cette ligne rencontre qF, sera un point de la courbe cherchée. En effet les triangles semblables qbm, qPM donnent $PM : qM :: bm : qm :: m : n$; donc $qM = \frac{n}{m}$. PM & $qF = qM + FM =$ AH $-$ FH (par supposition), ou $\frac{n}{m}$. PM $=$ AH $-$ FM $-$ FH.

REMARQUE. Il est évident que la courbe AM est différente (fig. 107), selon que le point A est plus ou moins éloigné du point lumineux B, parce que la valeur de Fq change; d'où il suit que la même courbe FH peut être caustique par réfraction d'une infinité de courbes AM.

129. PROBLÈME. *Etant donné un point lumineux B (fig. 107), trouver une courbe AM (*) telle que tous les rayons rompus BM se rassemblent en un point F ou H?*

Par les principes qu'on a établis ci-dessus (123) en faisant la ligne PM $= z$, BA $= a$, & l'excès de AH sur MF ou de MF sur HA $= u$, pour avoir AH $-$ FM $= \pm u$, selon que AH sera plus grande ou plus petite que FM, l'on aura $\frac{n}{m}$. $z = \pm u -$ FH $= \pm u$, en supposant FH $= o$ ou en supposant que la caustique se réduise à un seul point; donc alors $m : n :: z : \pm u$; d'où l'on voit que la différence PM du rayon incident MB & du rayon BA, est à la différence $\pm u$ des rayons réfractés & correspondans MF, AH dans la raison de $m : n$; & de-là l'on tire la construction des quatre ovales,

(*) Le point A est censé donné aussi bien que le point H.

dont parle Deſcartes vers la fin du ſecond Livre de ſa Géométrie, & qui ont fait tant de bruit parmi les Géomètres.

Pour conſtruire ces courbes (fig. 109), ayant tiré la ligne BAF, je lui mene ſous un angle quelconque la ligne T*r*; je prends A*m* à volonté & A*n* telle que l'on ait *m* : *n* :: A*m* : A*n*; je mene *m n* & du point B comme centre, avec le rayon B*m*, je trace un arc en *i*; prenant enſuite A*t* = AF, du point F, avec le rayon *t n*, je trace un ſecond arc qui coupe le premier au point *i*, qui eſt un point de la courbe cherchée. L'on trouvera de même tant d'autres points que l'on voudra, en prenant d'autres lignes A*m* & cherchant les points correſpondans.

Si on ſuppoſe A*m* = o, l'on aura auſſi A*n* = o, & le point cherché tombera ſur le point A. Pour prouver que ce point appartient à la courbe cherchée, je remarque que l'excès A*m* = *z* du rayon incident B*i* ſur BA eſt alors = o, auſſi bien que la différence A*n* du rayon AF ſur F*i*; or par conſtruction A*m* : A*n* :: *m* : *n*, ou *z* : *u* :: *m* : *n*.

Si l'on fait AT = AF & qu'on prenne pour le rayon du ſecond arc (qu'on doit tracer du point F) T*n* au lieu de *t n*, le point *i* appartiendra à une autre ovale qui aura la même propriété que la premiere.

Pour la troiſiéme & quatriéme ovale, l'on tranſportera le point F en *f*, de maniere que le point *f* ſoit plus éloigné du point A que le point B, & prenant pour la troiſiéme AT = A*f*, du point *f*, avec le rayon T*n*, on décrira un arc qui coupera l'arc décrit du point B avec le rayon *m* B au point cherché (*).

Pour avoir la quatriéme ovale, je prends A*t* = A*f*, & le point *f* pour le centre du ſecond arc décrit du rayon *t n*; le point où cet arc rencontrera le premier décrit du point B avec le rayon B*m*, appartiendra à la courbe.

REMARQUE I. Dans la premiere & quatriéme de ces courbes, les rayons *t n* des ſeconds arcs ſont moindres que FA ou *f*A; donc dans la premiere F*i* = FA — *u* = *b* — *u*, en faiſant FA = *b*; de même dans la quatriéme *fi* = *b* — *u* = $b - \frac{nz}{m}$; au contraire dans les deux autres, l'on a F*i*, ou *fi* = *b* + *u* = $b + \frac{nz}{m}$.

(*) Il n'importe pas que ce ſoit les rayons incidens ou leurs prolongemens qui ſe réuniſſent en *f*.

REMARQUE II. Pour avoir l'équation de ces courbes, d'un point quelconque M, je tire l'ordonnée Mp (y) perpendiculairement sur la ligne Ap, que je fais $= x$; & je me souviens que $\frac{n}{m} \cdot z = u$, d'où l'on tire $z = \frac{m}{n} \cdot u$. Cela posé dans la premiere & la seconde ovale, j'ai B$p = a + x$, F$p = b - x$; dans la troisiéme & quatriéme ovale, j'ai $fp = b + x$, $fB = b - a$; mais dans toutes les ovales, $BM = a + z = a + \frac{mu}{n}$. Maintenant les triangles rectangles B Mp, F Mp ou fMp, donnent $(BM)^2 - (Bp)^2 = (Mp)^2 = (FM)^2 - (Fp)^2$, ou $zz + 2az - xx - 2ax = yy = \frac{nn}{mm} zz \mp \frac{2nbz}{m} - xx \pm 2bx$; d'où l'on tirera une équation qui ne contiendra que les variables x & y sans z, & ce sera l'équation de la courbe.

Si le point B est supposé infiniment éloigné, ou, ce qui revient au même, si les rayons incidens sont parallèles, l'on aura $a = \infty$; donc effaçant tous les termes dans lesquels ne se trouve pas a, l'équation $zz + 2az - xx - 2ax = yy$ deviendra $2az - 2ax = 0$, ou $2z - 2x = 0$, ou $x = z$. Substituant cette valeur de z dans l'équation $yy = \frac{nn}{mm} zz \mp \frac{2nbz}{m} - xx \pm 2bx$, elle deviendra, en transposant, $(\frac{mm - nn}{mm}) \cdot xx \pm \frac{2nbx}{m} \mp 2bx + yy = 0$ (*).

Si AF, ou Af, ou b est supposé infini, c'est-à-dire, si les

(*) La lumiere passant de l'air dans le verre, l'on a $m : n :: 3 : 2$; les termes qui contiennent xx & yy, sont positifs, & dans ce cas l'ellipse peut résoudre le problême (voyez ce que nous avons dit dans la premiere Partie Courb. algéb. n° 12). Au reste si les rayons doivent se réunir au point F, il faut supposer que la courbe A M, en tournant autour de son axe A F, engendre un solide dans lequel se fait la réfraction, & que le point F est dans ce solide, ou du moins qu'il est le centre d'une surface sphérique qui termine le solide du côté de F.

rayons rompus doivent être parallèles, l'équation $yy = \frac{nn}{mm}zz \mp \frac{2nbz}{m} - xx \pm 2bx$, deviendra $\mp \frac{2nbz}{m} \pm 2bx = 0$, d'où l'on tire $z = \frac{m}{n}x$. Substituant cette valeur de z dans l'équation $zz + 2az - xx - 2ax = yy$ & transposant, il vient $(\frac{mm-nn}{nn})\,xx + \frac{2am}{n}x - 2ax - yy = 0$, équation à l'hyperbole. Or si les rayons incidens partoient de F ou de f, en supposant ces points à une distance infinie, ou, ce qui revient au même, si ces rayons étoient parallèles, ils se réuniroient évidemment en B dans le premier cas: puisque, selon ce qu'on a dit ci-dessus (123), un rayon rompu, en rebroussant son chemin, doit suivre la même route qu'il a suivie avant la réfraction; mais dans le second cas les prolongemens des rayons réfractés se réunissent en f; donc l'hyperbole & l'ellipse sont des courbes propres à résoudre le problème, lorsque les rayons incidens sont parallèles.

REMARQUE III. Comme la lumiere n'est pas homogenée, mais qu'elle est composée de sept rayons principaux, *rouge*, *jaune*, *orangé*, *bleu*, *verd*, *indigo* & *violet* (ainsi que l'a démontré M. Newton), qui sont tels que sous le même angle d'incidence, leurs angles de réfraction sont un peu différens, de sorte que le rouge se refracte moins que le verd, & celui-ci moins que le violet, il arrivera que si le rayon verd parvient en F, le violet parviendra en *m* par exemple, & le rayon rouge en L, en supposant que ces trois rayons tombent en M sous le même angle d'incidence; donc le foyer F ne sera pas absolument (mais seulement sensiblement) mathématique. Nous avons fait l'application de l'ellipse & de l'hyperbole à la dioptrique d'une maniere plus élémentaire dans nos Institutions Mathématiques.

Des points d'inflexion & de rebroussement.

130. Le point D, où une courbe de concave devient convexe ou réciproquement (fig. 110 & 111) s'appelle *point d'inflexion*. Si la courbe *m*DM (fig. 112 & 113), après avoir avancé de *m* en D, rebrousse son chemin vers M, le point D est appellé

point de rebroussement. Si l'on se rappelle ce qu'on a dit ci-dessus (46) sur les *maxima* & les *minima*, on comprendra aisément que le rapport de dy à dx ou $\frac{dy}{dx}$ est nécessairement un *minimum* (fig. 110) au point d'inflexion (il en est de même de $\frac{ddy}{dx^2}$); car, selon ce qu'on a dit dans l'endroit cité, les dy vont en diminuant dans la partie concave depuis A jusqu'en D, & en augmentant depuis D dans la partie convexe; c'est le contraire dans la fig. 111; donc dans le cas d'un point d'inflexion, le rapport $\frac{dy}{dx}$ croîtra jusqu'en D, & décroîtra ensuite ou réciproquement; donc au point D, il deviendra un *maximum* ou un *minimum*, & sa différentielle sera $\frac{ddy}{dx}$ (en supposant dx constant) $= 0$ ou $= \infty$; donc aussi $\frac{ddy}{dx^2}$ sera $= 0$, ou $= \infty$. Ce sera la même chose au point D de rebroussement (fig. 112 & 113); donc pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement dans les courbes dont les ordonnées sont parallèles, il suffit de supposer $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, ou $= \infty$, ou, ce qui revient au même, il suffit de supposer $ddy = 0$ ou ∞ (*).

(*) Nous ne croyons pas pour cela que ddy soit réellement $= \infty$; mais cette supposition donne le même résultat

REMARQUE. Il eſt aiſé de voir qu'ayant tiré la tangente m D i & ſuppoſant mn = D S & menant S ir (fig. 110) ou S i, (fig. 111), les triangles ſemblables & égaux m D n, D S i donneront S i = D n; donc S r > S i = D n (fig. 110), mais S r < D n (fig. 111): auſſi les dy vont en diminuant de A en D, & en augmentant de D en M (fig. 110) c'eſt le contraire dans la fig. 111; donc le rapport $\frac{dy}{dx}$ eſt un *maximum* ou un *minimum* au point D, comme on l'a dit ci-deſſus.

131. PROBLÊME. *Trouver le point d'inflexion D de la courbe A N (fig. 114) dont l'équation eſt* $a\,x^2 = y\,(aa + xx)$. Soit A C = x, A B = a, C D = $y = \frac{a\,x^2}{aa+xx}$; donc $dy = \frac{2\,a^3\,x\,dx + 2\,a\,x^3\,dx - 2\,a\,x^3\,dx}{(aa+xx)^2} = \frac{2\,a^3\,x\,dx}{(aa+xx)^2}$, & $ddy = \frac{2\,a^3\,dx^2\,(aa+xx)^2 - 4.\,a^3\,x\,dx.\,2\,x\,dx.\,(a^2+xx)}{(aa+xx)^4}$ (en ſuppoſant dx conſtant) = $\frac{(2\,a^7 - 4\,a^5\,x^2 - 6\,a^3\,x^4).\,dx^2}{(aa+xx)^4} = 0$. Multipliant par le dénominateur & diviſant par $a^3\,dx^3$, il vient $2\,a^4 - 4\,a^2\,x^2 - 6\,x^2 = 0$; diviſant par $a^2 + x^2$, l'on trouve $2\,a^2 - 6\,x^2 = 0$, ou $x^2 = \frac{2}{6}\,a^2 = \frac{1}{3}\,a^2$ & $x = \sqrt{(\frac{1}{3}\,a\,a)}$; donc prenant A C moyenne

que ſi on faiſoit $\frac{ddy}{dx^2} = \infty$, comme il ſera aiſé de le comprendre, en faiſant attention aux valeurs de ddy, dans les exemples qu'on va donner.

proportionnelle entre a & $\frac{1}{3}a$, l'ordonnée CD rencontrera la courbe au point cherché.

132. PROBLEME. *Trouver le point d'inflexion D dans une demi-cycloïde allongée AF (fig. 115).* Supposant la base Ba de la demi-cycloïde ordinaire $=C$ & $D > C$, l'on aura, en faisant l'arc AM $= x$ & la demi-circonférence AMB $= C$, l'on aura, dis-je, $C : D = BF :: x : MN = y$. Mais si l'on veut rapporter les points de la courbe à l'axe AB, y sera $= PD = PM + \frac{Dx}{C}$; & supposant $PM = t$, l'abscisse $AP = u$, le rayon du cercle générateur $= r$, l'on aura $du = pP$, $nm = dt$. Donc $dy = dt + \frac{D.dx}{C}$; or par la nature du cercle, $t = (2r.u - uu)^{\frac{1}{2}}$, $dt = (rdu - udu) \times (2ru - uu)^{-\frac{1}{2}} = \frac{rdu - udu}{\sqrt{(2ru - uu)}}$. Mais en supposant nM parallèle à AB, le triangle rectangle nMm donne mM $= dx = \sqrt{(du^2 + dt^2)}$; donc $dy = \frac{rdu - udu}{\sqrt{(2ru - uu)}} + \frac{D}{C} \times \frac{\sqrt{[(rdu - udu)^2 + du^2(2ru - uu)]}}{\sqrt{(2ru - uu)}}$, en substituant la valeur de dt. Multipliant les termes de la premiere fraction par C, effectuant la multiplication indiquée & réduisant, il vient $dy = \frac{Crdu - Cudu + D.r.du}{C.\sqrt{(2ru - uu)}}$. Donc en supposant du constant, l'on aura $ddy = \frac{dd^2(-Cr^2 - Dr^2 + Dru)}{C.(2ru - uu).\sqrt{(2ru - uu)}}$

$= 0$, ou en ôtant le dénominateur & divisant par du^2, $- Cr^2 - Dr^2 + Dru = 0$, ou $Dru = Dr^2 + Cr^2$; ainsi $u = \frac{r^2(D+C)}{Dr} = r + \frac{Cr}{D}$. C'est pourquoi si on prend une quatrieme proportionnelle aux lignes D, C & r & qu'on l'ajoute au rayon r, l'on aura l'abscisse AC, à laquelle répond l'ordonnée CD, qui rencontre la cycloïde allongée au point d'inflexion.

133. PROBLEME. *Trouver le point d'inflexion D dans la courbe AD dont les ordonnées sont troisiemes proportionnelles à celles du demi-cercle AMB & de la parabole Am* (*fig.* 116). Soit le diamètre du cercle donné $= a$, l'abscisse $AC = x$, l'ordonnée CM du cercle $= t$, l'ordonnée Cm de la parabole $= y$ & l'ordonnée de la courbe proposée CD $= u$; l'on aura $t : y :: y : u = \frac{yy}{t}$. Mais en faisant le paramètre de la parabole $= p$, l'on a $y^2 = px$, & par la nature du cercle, t est $= \sqrt{(ax - xx)}$; donc en substituant ces valeurs, il viendra $u = \frac{px}{\sqrt{(ax-xx)}}$, d'où l'on tire $du = \frac{apxdx}{2.(ax-xx).\sqrt{(ax-xx)}}$. Différentiant de nouveau, en supposant dx constant, l'on aura, en divisant par dx, multipliant par $\sqrt{(ax-xx)}$ & ôtant la fraction, l'on aura, dis-je, $ddu = 0 = 2ap(ax-xx)^2 - 3apx(a-2x).(ax-xx)$; ainsi en divisant par $(ax-xx)$ & transposant, on aura $2a^2px - 2apx^2 = 3aapx - 6apx^2$, ou $2a - 2x = 3a - 6x$, d'où l'on tire $4x = a$ & $x = \frac{1}{4}a$; donc si l'on fait $AC = \frac{AB}{4}$, l'ordonnée CD rencontrera la courbe au point d'inflexion.

134. PROBLÊME. *Trouver le point de rebrouſſement de la courbe m D M (fig. 117), dont l'équation eſt* $y^5 = ax^4 = x^4$, *en ſuppoſant* $a = 1$. Soit $AP = x$, $PM = y$, l'on aura $5y^4\,dy = 4x^3\,dx$, & $dy = \frac{4}{5} \times \frac{x^3\,dx}{y^4} = \frac{4}{5}\,dx \left(\frac{x^3}{x^{\frac{16}{5}}}\right)$ (*).

Donc en ôtant l'expoſant $\frac{16}{5}$ du diviſeur de l'expoſant $3 = \frac{15}{5}$ du dividende, il vient $dy = \frac{4}{5} \times dx.\,x^{-\frac{1}{15}}$, $ddy = -\frac{4}{75}\,dx^2\,(x)^{-\frac{1}{15}-1}$ (**). Mais $\frac{-1}{15} - 1 = -\frac{16}{15}$; donc $ddy = \left(-\frac{4}{75} \times \frac{1}{x^{\frac{16}{15}}}\right) \times dx^2$. La ſuppoſition de $ddy = 0$ ne donne rien à connoître; mais en ſuppoſant $ddy = \infty$, l'on a $x = 0$; ce qui fait voir que le point cherché répond à l'origine A des x, point auquel $AP = 0$. Subſtituant cette valeur de x dans l'équation de la courbe, l'on aura $y^5 = 0$, & $y = 0$.

REMARQUE. La méthode précédente a cela d'incommode, qu'elle ne fait point diſtinguer un point d'inflexion d'un point de rebrouſſement, ni un point d'inflexion viſible de celui qui eſt inviſible; & de plus elle pourroit induire en erreur, en faiſant croire que tout point d'une courbe trouvé, par la ſuppoſition de $ddy = 0$ ou de $ddy = \infty$, eſt un point de rebrouſſement ou un point d'inflexion; ce qui cependant n'eſt pas : car en ſuppoſant dx conſtant, l'on tirera de l'équation au cercle $yy = 2ax - xx$, l'on tirera, dis-je, ddy,

(*) Car $y = x^{\frac{4}{5}}$, $y^4 = x^{\frac{16}{5}}$.

(**) On ſuppoſe dx conſtant.

$= \frac{-aadx^2}{(2ax-xx).\sqrt{(2ax-xx)}}$. Si l'on fait $ddy = \infty$, l'on aura le dénominateur $= 0$, ou $2ax - xx = 0$, ou $2ax = xx$, ou $2a = x$; ce qui indique seulement qu'à l'extrémité du diamètre la tangente est parallèle aux ordonnées. Il ne sera donc pas inutile de donner une autre méthode.

135. Nous avons vu ci-dessus (103) que la mesure de l'angle de courbure DCL (fig. 67) $= q$, étoit $= \frac{dyddx - dxddy}{ds^2}$. En supposant dx constant, l'on aura $q = \frac{-dxddy}{ds^2} = \frac{-dxddy}{dx^2+dy^2}$. Cette formule suppose que les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses. Si les ordonnées sont supposées partir d'un point, en appellant R le rayon de la développée, l'on aura (n° 103) $R = \frac{yds^3}{dx^3+dxdy^2+ydyddx-ydxddy}$; mais en supposant que CQ est le rayon de la développée au point C de la courbe AD (fig. 118) rapportée au foyer F, les secteurs semblables CQD, DCL donneront $CQ = R : CD :: CD : DL = \frac{(CD)^2}{R} = \frac{dxds^2+ydyddx-ydxddy}{yds}$, en substituant les valeurs de $CD = ds$ & de R, & faisant attention que $dx^3 + dx\,dy^2 = dx.(dx^2+dy^2) = dxds^2$. Maintenant si l'on veut avoir la valeur q de l'angle DCL, en supposant le rayon $= 1$, l'on fera $CD = ds$ (*) : 1 :: DL :

(*) L'on suppose la corde CD égale à son arc, parce qu'un arc infiniment petit est censé égal à sa corde.

$q = \frac{DL}{ds} = \frac{dx.ds^2 + ydy\,ddx - ydx\,ddy}{yds^2}$

$= \frac{dx\,ds^2 - ydx\,ddy}{yds^2}$, en supposant dx constant; si q est négatif, la courbe sera convexe vers le foyer F, ou vers son axe, si la courbe est rapportée à un axe; on doit faire attention à ces valeurs de q.

Si la courbe est disposée comme dans la fig. 119, il est visible que la valeur de q aura le même signe aux points m & M. Il en sera de même dans la fig. 113; mais dans la fig. 120 les signes de q seront différens.

Nous avons dit ci-dessus (102) que la seule parabole vulgaire avoit au sommet une courbure circulaire; cependant en cherchant le rayon de courbure des paraboles quelconque, qu'on peut représenter par l'équation $y^m = x$, en supposant le paramètre = 1 & m un nombre quelconque entier ou fractionnaire, on trouvera par le moyen de la formule $\frac{ds^3}{-dx\,ddy}$, en substituant les valeurs de dx & de ddy, l'on trouvera, dis-je, le rayon osculateur $R = \frac{(m^2y^{2m-2}+1).\sqrt{(m^2y^{2m-2}+1)}}{(mm-m).y^{m-2}}$

$= \frac{(m^2y^{2m-2}+1)^{\frac{3}{2}}}{(mm-m)y^{m-2}}$. Si on suppose $m > 2$ & $y = 0$, l'on a $R = \frac{1}{(mm-m).0} = \infty$; si $m < 2$, le numérateur devient $(\frac{m^2}{y^{2-2m}})^{\frac{3}{2}}$ (en négligeant 1, qui dans ce cas disparoît, puisque

y^{2-2m} devient $= 0$, & $\frac{m^2}{y^{2-2m}} = \infty$) $= \frac{m^2}{y^{3-3m}}$. Supposant $mm - m = a$ & divisant la fraction que nous venons de trouver, par $\frac{a}{y^{2-m}}$, & faisant $\frac{m^2}{a} = B$, il vient $B. \frac{y^{3-m}}{y^{3-3m}} = B.y^{2m-1}$, en ôtant l'exposant du diviseur de celui du dividende. Si $2m > 1$, l'on a $B \times 0 = 0$; si $2m = 1$, l'on a $m = \frac{1}{2}$ & $y^m = x$ devient $y^{\frac{1}{2}} = x$ ou $y = x^2$, qui en changeant x en y & réciproquement, devient $y^2 = x$, équation à la parabole ordinaire, en supposant le paramètre $= 1$; & alors $R = B = -\frac{1}{2}$. Le signe $-$ indique que l'on doit prendre le rayon osculateur du côté opposé à l'axe des x, qui dans ce cas est une ligne tangente au sommet de la parabole, en supposant que l'angle des co-ordonnées est droit. Si $2m < 1$ ou $m > \frac{1}{2}$, en faisant $2m - 1 = n$, l'on a $R = By^{-n} = \frac{B}{y^n} = \frac{B}{0}$ (en supposant $y = 0$) $= \infty$. Si $m = 2$, alors le numérateur $(m^2y^{2m-2} + 1)^{\frac{3}{2}}$ devient $= 1$, & le dénominateur devient $= (mm - m)$. $y^0 = mm - m$, à cause de $y^0 = 1$, & l'on a $R = \frac{1}{3}$. On ne peut pas supposer $m = 1$: car alors on auroit $y = x$, équation à la ligne droite.

De ce qu'on vient de dire, il suit qu'au sommet des paraboles, si l'on excepte la parabole vulgaire, le rayon de courbure est $= 0$ ou infini (*).

(*) Nous supposons ici que la parabole vulgaire a un paramètre fini.

Mais, ſelon ce qu'on a dit dans la premiere Partie de ce Cours, il n'y a aucun point dans une branche de courbe dont la courbure ne ſoit la même que la courbure au ſommet d'une parabole; & toutes les paraboles, excepté la vulgaire, ont à leur ſommet un point d'inflexion (viſible ou inviſible), ou un point de rebrouſſement: ainſi qu'il eſt facile de s'en convaincre, ſoit en les décrivant ſoit en ſe rappellant ce qu'on a dit dans la premiere Partie de cet Ouvrage. Donc au point d'inflexion & de rebrouſſement d'une branche de courbe, le rayon oſculateur eſt = 0 ou infini.

Pour faire mieux concevoir cela aux Commençans, ſoit la courbe M D*m* (fig. 120) qui ait un point d'inflexion D, auquel le rayon oſculateur ait été trouvé infini, il eſt évident qu'à proportion que les rayons oſculateurs M F, *n* F, *i f* s'approchent du point d'inflexion D, ils doivent approcher du paralléliſme; & comme ils doivent toujours être perpendiculaires à la courbe, ſi l'on conçoit que le petit arc D*i* ſoit une ligne droite, le rayon *i f* ſera perpendiculaire à cette droite, & ſera parallèle à la ligne D P, qu'on ſuppoſe perpendiculaire à D*i*; donc ces lignes ne peuvent ſe rencontrer, c'eſt-à-dire, que les rayons oſculateurs ne peuvent de poſitifs devenir négatifs, ou paſſer de la partie concave M D à la partie convexe D*m*, ſans devenir parallèles; de même, ils ne peuvent paſſer de la partie convexe *m* D, ſans que les rayons oſculateurs ne ſoient devenus parallèles à D *p*. Mais une ligne droite *b* D ne peut dans la rigueur mathématique être regardée comme un arc de

cercle (*), en ſuppoſant même le rayon $bf = \infty$. En effet dans ce cas les perpendiculaires aux extrémités D & b de cette ligne, ſe rencontreroient au centre du cercle, formeroient un angle (ſi petit qu'on voudra), & les angles du triangle formé par les deux rayons, & la ligne D b vaudroient plus de deux angles droits, ce qui ne peut être; de plus un tel cercle ne ſeroit pas rond. En ſuppoſant donc D n l'arc & D b la tangente, il y aura toujours un petit intervalle entre b & n, quelque grand que ſoit le rayon du cercle. Donc au point D il n'y a aucun cercle oſculateur, en ſuppoſant même le rayon du cercle $= \infty$. Si les rayons M f, nf, (fig. 121) vont en diminuant, en s'approchant de D, de maniere que le point P ou DP rencontre if, tombe ſur le point D, l'arc o D n ne ſauroit être circulaire; car de quel côté ſeroit ſitué ſon centre? ſeroit-ce en p ou en P? Mais il n'y a pas plus de raiſon pour le placer en p que pour le placer en P; & comme il ne peut pas être de deux côtés de la tangente b D, il eſt clair que cet arc n'eſt pas circulaire (**). Cela s'accorde avec ce qu'on a démontré dans la premiere Partie & ci-deſſus (102), que la courbure au ſommet des paraboles, ſi on excepte la vulgaire, n'étoit pas circulaire. Ainſi lorſqu'on trouve que le rayon oſculateur correſpondant à un point d'une branche

(*) Il y a des cas où l'on peut ſuppoſer qu'un arc de cercle d'un rayon infini eſt une ligne droite égale à ſa tangente; car il eſt viſible qu'en ſuppoſant l'arc D n fini, & ſon rayon infini, la différence entre cet arc & ſa tangente D b ne peut être qu'inaſſignable; donc on peut, ſans erreur, ſuppoſer ces lignes égales.

(**) Si l'on dit que le centre eſt ſur la tangente, cela ne ſe conçoit pas, puiſqu'il faut qu'il y ait une diſtance entre le centre & la tangente; & s'il n'y en a pas, c'eſt alors un point, & non un cercle.

de courbe, eſt = 0 ou infini, on doit ſeulement conclure qu'il y a dans ce point un point d'inflexion ou de rebrouſſement; mais il n'y aura aucun point d'inflexion ou de rebrouſſement, à moins que les R correſpondans aux points voiſins du point B, auquel l'on a trouvé R = 0 ou = ∞ (il y a cependant un cas dont on parlera dans la ſuite, dans lequel le rayon oſculateur peut être infini, quoique la courbure ſoit circulaire) ne ſoient de différens ſignes; car (fig. 123) ſi la courbe avoit au point D un point d'inflexion inviſible, c'eſt-à-dire, qu'elle devînt de concave (vers F) convexe, & qu'elle redevînt auſſitôt concave, le point d'inflexion ſeroit inviſible; mais les R aux points voiſins *m* & M ſeroient de même ſigne. Dans les fig. 119 & 120, les R aux points *m* & M étant dirigés de différens côtés, ont différens ſignes; mais aux points *m* & M voiſins du point de rebrouſſement D, les *q* (fig. 119) auront les mêmes ſignes & différens ſignes aux points *m* & M (fig. 120).

136. PROBLÊME. *Etant donnée l'équation d'une branche de courbe dont les ordonnées ſont perpendiculaires à l'axe des abſciſſes ou dont les ordonnées partent d'un foyer, trouver ſes points de rebrouſſement & ſes points d'inflexion?* Cherchez R par quelques-unes des formules qu'on a données ci-deſſus, ſelon que les ordonnées ſont rapportées à un axe, ou qu'elles partent d'un foyer. Suppoſez R = 0 & enſuite = ∞, & cherchez *x*. Mais ſi les ordonnées partent d'un foyer, cherchez ce qui (dans l'équation) repréſente *x* (*); cherchez enſuite les R par rapport aux points *m* & M voiſins du point

(*) Cela s'éclaircira par le n° 142.

trouvé D. Si leurs signes sont les mêmes, il n'y aura au point D ni point d'inflexion (*il s'agit d'une inflexion visible*) ni point de rebroussement. Si les signes sont différens, il y aura un point d'inflexion ou un point de rebroussement. Pour distinguer lequel des deux a lieu, on cherchera la valeur de l'angle désigné par q (valeur qu'on appellera q pour abréger) aux points m & M. Si les signes de q sont les mêmes, on aura un point de rebroussement; mais si les signes de q sont différens, l'on aura un point d'inflexion; si le signe de q correspondant à M (fig. 119) est positif, la courbe sera concave vers le bas & convexe vers le haut; si le signe de q par rapport au point m (fig. 122) est négatif, l'arc Dm sera convexe vers le bas & concave vers le haut. Tout cela est évident, en faisant attention à ce qu'on a dit ci-dessus.

137. PROBLÈME. *Trouver les points d'inflexion ou de rebroussement de la branche de courbe dont l'équation est* $y = \sqrt[3]{(a^3 + x^3)}$ *ou* $y^3 = a^3 + x^3$, *car l'une & l'autre équation désigne la même branche, puisqu'à une abscisse il ne peut répondre qu'un seul* y (*). En différenciant, l'on a $3y^2\,dy = 3x^2\,dx$, ou $y^2\,dy = x\,x\,dx$, $y^4\,dy^2 = x^4\,dx^2$ & $dy^2 = \frac{x^4\,dx^2}{y^4}$ (P); différenciant l'équation $y^2\,dy = x\,x\,dx$ en sup-

(*) Si l'on avoit l'équation $y^2 = a^4 + x^4$, l'on auroit $y = \pm\sqrt{(a^4 + x^4)}$, & alors à chaque abscisse il répondroit deux ordonnées; ainsi la courbe auroit deux branches, l'une désignée par l'équation $y = +\sqrt{(a^4 + x^4)}$, l'autre par l'équation $y = -\sqrt{(a^4 + x^4)}$, & il faudroit opérer sur chaque branche en particulier.

posant

posant dx constant, il vient $2ydy^2 + y^2\,ddy = 2xdx^2$, & $y^2\,ddy = 2xdx^2 - 2ydy^2$, où $y^2\,ddy = 2xdx^2 - \frac{2x^4dx^2}{y^3}$, en substituant la valeur de dy^2 prise de l'équation P. En ôtant la fraction, on trouve $y^5\,ddy = 2xy^3dx^2 - 2x^4dx^2$. Si on substitue dans le second membre la valeur de y^3 prise de l'équation de la courbe, l'on aura $y^5\,ddy = 2a^3xdx^2 + 2x^4dx^2 - 2x^4dx^2 = 2a^3xdx^2$, & par conséquent $ddy = \frac{2a^3xdx^2}{y^5}$. Nous employerons la formule du rayon osculateur $\frac{ds^3}{-dx\,ddy}$ & la valeur de $q = \frac{-dx\,ddy}{ds^2}$ que l'on trouve dans la même supposition, & l'on aura par les valeurs trouvées, $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{x^4dx^2}{y^4} = \frac{(y^4+x^4).dx^2}{y^4}$, & $dx\,ddy = \frac{2a^3xdx^3}{y^5}$; donc $R = \frac{-\sqrt{(y^4+x^4)^3}}{2a^3xy}$, & $q = \frac{-2a^3xdx}{y^5+x^4y}$.

Si l'on suppose $R = 0$, l'on aura $\sqrt{(y^4+x^4)} = 0$, ou $y^4 = -x^4$, ou $y = \pm\sqrt{(-x^4)}$, quantité imaginaire; ainsi l'on ne peut pas supposer $R = 0$. Supposant $R = \infty$, l'on a $2a^3xy = 0$, ou $xy = 0$, dont les facteurs sont $x = 0$ & $y = 0$. Substituant la valeur de $x = 0$ dans l'équation de la courbe, l'on a $y^3 = a^3$, ou $y = a$. Si l'on substitue dans la même équation la valeur de $y = 0$, il vient $x^3 + a^3 = 0$, $x^3 = -a^3$, ou $x = -a$.

On doit donc examiner les points qui répondent à $x = 0$ & à $x = -a$. Pour le premier point, on

ſuppoſera x augmenté ou diminué d'une très-petite quantité f, c'eſt-à-dire, on ſuppoſera $x = 0 \pm f$, ou $x = \pm f$, & l'on aura $y^3 = \pm f^3 + a^3$, ou $y^3 = a^3$, en négligeant f^3, c'eſt-à-dire, que le ſigne de y ne changera pas par cette ſuppoſition. Il eſt évident que ſi dans la valeur de $R = \frac{-\sqrt{(y^4+x^4)^3}}{2a^3xy}$ l'on met a à la place de y, R deviendra négatif, en ſuppoſant x poſitif (ou $= f$); mais R deviendra poſitif, en ſuppoſant x négatif; donc au point auquel $x = 0$, il y aura un point d'inflexion ou un point de rebrouſſement.

Pour ſavoir lequel des deux a lieu, examinons la quantité q; mais $q = \frac{-2a^3x\,dx}{y^5+yx^4}$ devient négatif, en ſuppoſant x poſitif, & poſitif en ſuppoſant x négatif (*); donc au point correſpondant à $x = 0$, il y aura un point d'inflexion, & non un point de rebrouſſement.

Quant à ce qui regarde le point auquel $x = -a$, ſi on ſubſtitue $-a+f$ au lieu de x, l'équation de la courbe donne $y^3 = a^3 - a^3 + 3a^2f$ (en négligeant les puiſſances ultérieures de f à cauſe de f infiniment petite) $= 3a^2f$, ou $y = \sqrt[3]{(3a^2f)}$; donc dans ce cas $R = \frac{-\sqrt{(y^4+x^4)^3}}{-2a^4\sqrt[3]{a^2f}}$, en négligeant dans le dénominateur le terme qui con-

(*) On n'a pas égard à dx qu'on regarde comme ne changeant pas de ſigne, ou qu'on regarde comme ayant le ſigne +.

tiendroit f^2. Le numérateur conſervera toujours le même ſigne, quelle que ſoit la valeur de y, mais le dénominateur deviendra poſitif, en ſuppoſant f négative; donc au point qui répond à $x = -a$, il y aura un point d'inflexion ou un point de rebrouſſement; mais dans ce cas on a $q = \frac{2a^4 dx}{(y^4+x^4)\sqrt[3]{3a^2f}}$, ou $\frac{q}{dx} = \frac{2a^4}{(y^4+x^4)\sqrt[3]{3a^2f}}$; il eſt évident que q ſera poſitif, en faiſant f poſitive, & négatif, en ſuppoſant f négative; c'eſt-à-dire, qu'en augmentant x d'une quantité fort petite, l'on aura pour la valeur de q une quantité poſitive, tandis qu'on aura pour le point que nous appellerons m, correſpondant à x augmenté d'une petite quantité négative, une valeur négative de q; donc il y aura au point correſpondant à $x = -a$, un point d'inflexion, & non un point de rebrouſſement.

138. PROBLÊME. *Trouver ſi dans la courbe déſignée par* $y = a - x^{\frac{2}{3}}$ *il y a un point d'inflexion ou de rebrouſſement.* De l'équation de la courbe, je tire $dy = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}.dx$, $ddy = \frac{2}{9}.x^{-\frac{4}{3}}.dx^2$, en ſuppoſant dx conſtant; donc $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2.(1+\frac{4}{9}.x^{-\frac{2}{3}})$, & $dxddy = \frac{2}{9}.x^{-\frac{4}{3}}.dx^3$; donc $R = \frac{-ds^3}{dxddy} = \frac{-(1+\frac{4}{9}.x^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{9}.x^{-\frac{4}{3}}}$ $= -\frac{9}{2}.(1+\frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}})^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{4}{3}}$. Multipliant la quantité ſous le ſigne $\frac{3}{2}$ par $9.x^{\frac{3}{2}}$, & diviſant hors du ſigne

par $(9.x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 27x$ (*), l'on aura $-\frac{2}{3}.\frac{(9.x^{\frac{2}{3}}+4)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{4}{3}}}{27x}$

$= \frac{-(9.x^{\frac{2}{3}}+4)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{3}}}{6} = R.$

Si l'on ſuppoſe cette quantité $= 0$, l'on aura $x = 0$, & ſuppoſant x poſitif & ſi petit qu'on voudra, le rayon R devient négatif, mais R devient poſitif, en ſuppoſant x négatif: ce qu'il eſt aiſé de voir; car en ſuppoſant x infiniment petit, l'on a dans ce cas

$R = \frac{-x^{\frac{1}{3}}(4)^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{-\sqrt{(4)^3}\sqrt[3]{x}}{6}$; or la quantité $\sqrt[3]{x}$ eſt poſitive, ſi x eſt poſitif, & négatif, ſi x eſt négatif; donc au point de la branche auquel $x = 0$, il y aura un point d'inflexion ou un point de rebrouſſement.

Pour ſavoir lequel des deux a lieu, je cherche q, qui dans ce cas devient $q = \frac{-dx\,ddy}{dx^2+dy^2}$

$= \frac{-\frac{2}{9}.x^{-\frac{4}{3}}.dx}{1+\frac{4}{9}.x^{-\frac{2}{3}}}$. Cette quantité eſt toujours négative, que x ſoit poſitif ou négatif & ſi petit que l'on voudra; donc au point correſpondant à $x = 0$, il y aura un point de rebrouſſement & non un point d'inflexion; & parce que de part & d'autre de ce point, q eſt négatif, les branches ſeront convexes vers le bas, & la pointe ſera tournée, comme on le voit dans la fig. 122, le point D étant éloigné de l'axe des x de la quantité AD $= a$; car au point A, auquel $x = 0$, l'on a $y = a$.

Si l'on ſuppoſe $R = \infty$, l'on a $6 = 0$, ce qui étant abſurde, cette ſuppoſition ne peut avoir

(*) Car le cube de 9 eſt 729, dont la racine eſt $= 27$; le cube de $x^{\frac{2}{3}}$ eſt $= x^{\frac{6}{3}} = x^2$, dont la racine $= x$.

lieu. Et de même si en supposant $R = o$ l'on trouvoit une équation absurde, l'on n'auroit ni point d'inflexion ni point de rebroussement.

Par exemple, si l'on avoit $y = x^n$, n étant un nombre entier pair & positif > 2, l'on auroit $dy = n.x^{n-1}.dx$, $ddy = [n.(n-1).x^{n-2}]\,dx^2$, $dx^2 + dy^2 = ds^2 = dx^2.(1 + n^2 x^{2n-2})$, & $-dx\,ddy = [-n.(n-1).x^{n-2}]\,dx^3$; donc $R = \frac{-\sqrt{(1+nnx^{2n-2})^3}}{n.(n-1).x^{n-2}}$. Si l'on fait $R = o$, l'on aura $1 + n^2 x^{2n-2} = o$, $n^2.x^{2n-2} = -1$, $x^{2n-2} = -\frac{1}{nn}$, $x^{n-1} = \pm\sqrt{\frac{-1}{nn}}$, quantité imaginaire qui fait voir qu'on ne peut supposer $R = o$.

Si on suppose $R = \infty$, l'on a $n.(n-1).x^{n-2} = o$, ou $x = o$, ce qui semble promettre un point d'inflexion ou de rebroussement (*). En substituant $o + f = f$ au lieu de x, le rayon R sera négatif, qu'on prenne f négative ou positive; donc dans ce cas il n'y a ni point d'inflexion ni point de rebroussement. Mais en supposant que n est un nombre impair entier > 1, R sera négatif, si f est positive, & positif, si f est négative. Il y aura donc alors un point d'inflexion ou un point de rebroussement correspondant à $x = o$; mais $q = \frac{(-nn+n)x^{n-2}dx}{1+n^2x^{2n-2}}$

(*) Si $n = 2$, l'on aura $x^{n-2} = x^o = 1$, & dans ce cas le dénominateur ne peut pas être supposé $= o$, & de plus R sera toujours négatif, quel que soit x positif ou négatif; donc dans ce cas la courbe a par-tout sa convexité tournée vers le bas ou vers ses abscisses. Si on suppose que n est $= -4$, dans ce cas au point correspondant à $x = o$, l'on aura $R = o$, avec un point de rebroussement formé par deux branches asymptotiques de la courbe qui ont pour tangente commune l'ordonnée infinie correspondante à $x = o$; mais il ne s'agit pas ici des points des courbes considerées dans un espace infini. On ne sauroit supposer $n = 1$, parce que l'équation $y = x^n$ seroit alors à la ligne droite.

devient négatif, en ſuppoſant $x = +f$, & poſitif, en ſuppoſant $x = -f$; car dans ce cas $n - 2$ eſt un nombre impair & $2n - 2$ un nombre pair ; donc au point correſpondant à $x = 0$, il y a dans ce cas un point d'inflexion.

Les points ſinguliers dont nous venons de parler, ne ſont pas les ſeuls que les Géomêtres conſidérent dans les courbes. On peut s'occuper encore des points qu'on appelle d'*inflexion inviſible*. Par exemple ſi (fig. 124) la courbe A*m* a un point d'inflexion en *m* & un autre en M de maniere qu'elle ſerpente en devenant en *m* de concave convexe, & en M de convexe concave vers l'axe AB, ſi les points M, *o*, M ſont ſuppoſés infiniment proches, & en ligne droite (fig. 125), alors la courbe paroîtra par-tout concave, & le point d'inflexion en *m* ſera inviſible, les arcs infiniment petits *mo*, M*o* (fig. 124) tomberont l'un & l'autre ſur la ligne *mi*M, & au lieu de la courbe A*mo*M, l'on aura la courbe A*im* qui n'aura aucun *point d'inflexion viſible*, & dans laquelle la petite ligne *mi*M, qui (fig. 125) devient *mo*M, pourra être regardée comme une ligne droite. L'on appelle ces ſortes de points d'inflexion inviſible *des points de ſerpentement ;* & toutes les courbes déſignées par l'équation $y = x^n$, n étant un nombre pair plus grand que 2, auront un point de ſerpentement correſpondant à l'abſciſſe $x = 0$. De même, la courbe de l'équation $by^3 = (a + x)^4$ a un point de ſerpentement correſpondant au point déſigné par $x = -a$.

139. PROBLÈME. *Trouver les points de ſerpentement d'une courbe algébrique dont les ordonnées ſont parallèles & perpendiculaires aux abſciſſes.* On pourra chercher les points auxquels le rayon oſculateur

R eſt $= 0$, ou $= \infty$; ſi à quelqu'un de ces points, ainſi trouvés, il n'y a ni point d'inflexion ni point de rembrouſſement (*), c'eſt-à-dire, ſi les rayons R correſpondans aux points voiſins ſitués l'un d'un côté, l'autre de l'autre des points ainſi trouvés ſont de même ſigne, l'on aura un point de ſerpentement pour chaque point auquel cela arrivera. Ainſi pour les courbes dont l'équation eſt $y = x^n$, n étant un nombre pair poſitif > 2, l'on aura un point de ſerpentement correſpondant au point auquel $x = 0$.

140. REMARQUE. Si on ſuppoſe $= b$, la valeur de l'abſciſſe x correſpondante à $R = 0$, ou à $R = \infty$, & qu'en ſubſtituant $b + f$ au lieu de x l'on trouve le rayon R imaginaire, c'eſt une marque que la branche ſe termine au point correſpondant à $x = b$; c'eſt la même choſe, ſi le rayon R correſpondant à f négative, eſt imaginaire; c'eſt-à-dire, que la branche n'exiſte que du côté correſpondant au rayon R réel, & alors il y a un point de rebrouſſement qui eſt formé par le concours de deux branches qui ſe terminent au même point, & dont nous parlerons bientôt.

Si l'on cherche le rayon oſculateur correſpondant au point B de la cycloïde A m B (fig. 126), on trouvera ce rayon $= 0$. Mais ſi le cercle générateur, après avoir décrit la cycloïde A m B, continue de tourner, il décrira une autre cycloïde B C b, & ainſi de ſuite, & toutes ces cycloïdes pourront ſe continuer tant du côté du point A que du côté du point b; de ſorte qu'elles ne for-

(*). On ſuppoſe que x & y ſont des quantités finies ou 0; & il n'eſt pas queſtion de la figure de la courbe à une diſtance infinie.

meront qu'une ſeule & même courbe compoſée d'une infinité d'arcs cycloïdaux, tels que A m B, B C b, &c. Les arcs A m B, B C b, en ſe joignant au point B, formeront évidemment un point de rebrouſſement de la premiere eſpéce; mais il ne s'agit ici que des points de rebrouſſement des courbes algébriques. On peut remarquer qu'en prenant P M troiſiéme proportionnelle aux ordonnées P m de la cycloïde & à la ligne A a = a, l'on aura une courbe compoſée d'une infinité d'arcs tels que N M n, & chacun de ces arcs aura deux branches aſymptotiques; mais tous ces arcs appartiendront à une ſeule & même courbe.

En général la courbe conſidérée au point auquel R = 0, ou R = ∞ aura dans ce point une courbure égale à celle du ſommet d'une parabole différente de la parabole vulgaire, & ce ſera toujours un point ſingulier. Au reſte l'on peut conſulter ce que nous avons dit ſur cette matiere dans la premiere Partie de cet Ouvrage. On y verra comment on détermine la multiplicité du point d'inflexion, ſoit viſible, ſoit inviſible [voyez Courbes Algébriques n°. 63] (*).

(*) Si une certaine valeur de x ou de y donnoit R = $\frac{0}{0}$, on ſubſtitueroit cette valeur dans l'équation de la courbe, & l'on verroit ſi par cette valeur de x on trouve y réel ou réciproquement, ou bien ſi ces valeurs de x & de y rendent l'équation de la courbe = 0, en ſuppoſant tous les termes d'un ſeul côté. Suppoſons que cette valeur ſoit = 1, & qu'en faiſant $x = 1 + f$ l'on trouve y imaginaire, quelle que ſoit f poſitive ou négative, dans ce cas on a un point conjugué détaché du reſte de la courbe, pourvu que l'ordonnée correſpondante à $x = 1$ ſoit réelle. C'eſt ce que l'on peut voir dans la courbe dont l'équation eſt $y^4 + x^4 = 4xy - 2$, qui a un point conjugué correſpondant à $x = 1$ & à $y = 1$; on a parlé ci-deſſus (96) de cette courbe.

141. Mais passons aux points d'inflexion & de rebroussement dans les courbes dont les ordonnées partent d'un point. Pour cela, rappellons-nous que dans ces courbes l'on a (103) $R = \frac{y\,ds^3}{dx^3 + dx\,dy^2 + y\,dy\,ddx - y\,dx\,ddy}$, & (135) $q = \frac{dx.ds^2 + y\,dy\,ddx - y\,dx\,ddy}{y\,ds^2}$. Comme dx désigne un petit arc décrit d'un rayon variable y, lequel arc est la mesure d'un angle, si l'on veut avoir l'arc dz qui soit la mesure de cet angle, en supposant que le rayon fait $= 1$, l'on fera $y : dx :: 1 : dz$, d'où l'on tire $y\,dz = dx$. Substituant cette valeur de dx dans R & q, se rappellant que $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$, faisant attention que $ddx = dy\,dz + y\,ddz = dy\,dz$ en supposant dz constant; & réduisant, il vient $R = \frac{(dy^2 + y^2\,dz^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,dy^2\,dz + y^2\,dz^3 - y\,dz\,ddy}$, & $q = \frac{2\,dy^2\,dz + y^2\,dz^3 - y\,dz\,ddy}{dy^2 + y^2\,dz^2}$.

Si l'on a une courbe Ci (fig. 127), dans laquelle on fasse le rayon C A $= a$ est à la circonférence A P D $= c$, comme le rayon C$i = y$ est à l'abscisse circulaire A P $= z$, ou $a : c :: y : z$, ou $az = cy$, l'on aura l'équation de la spirale d'Archimede. Si l'on fait $a = 1$, $\frac{1}{c} = b$, & $b : 1 :: y : z^n$, ou $y = b\,z^n$, l'on aura une infinité de spirales. Si a ne désignoit point l'unité & que l'on eût $a^r : c^m :: y^r : x^m$, ou $y^r = \frac{a^r}{c^m}\,x^m$, ou en faisant $\frac{m}{r} = n$, & $\frac{a^r}{c^m} = b^r$, l'on auroit $y = b\,x^n$. Si l'on

faiſoit $a : 1 :: x : z$, l'on auroit $x = az$; & ſubſtituant cette valeur de x au lieu de x dans l'équation $y^r = \frac{a^r}{(\quad)} x^m$, la courbe ſeroit rapportée à un cercle dont le rayon ſeroit $= 1$. Dans l'équation $y = bz^n$, z eſt la quantité qui repréſente x, & c'eſt de cette quantité qu'il faut dans ce cas entendre ce que nous avons dit (136).

142. PROBLÊME. *Trouver les points d'inflexion & de rebrouſſement des ſpirales repréſentées par l'équation* $y = bz^n$, z *étant un arc de cercle décrit d'un rayon* $= 1$. L'on aura $dy = nbz^{n-1}dz$; & ſuppoſant dz conſtant, $ddy = n.(n-1).bz^{n-2}dz^2$; donc $dy^2 + y^2dz^2 = dz^2(n^2b^2z^{2n-2} + y^2) = dz^2\left(\frac{n^2b^2z^{2n} + y^2z^2}{z^2}\right) = \frac{y^2dz^2}{z^2}.(n^2+z^2)$, en ſubſtituant y^2 au lieu de b^2z^{2n}; donc $(dy^2 + y^2dz^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{y^3dz^3}{z^3} - (n^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$. L'on a auſſi $2dy^2dz + y^2dz^3 - ydzddy = 2n^2b^2z^{2n-2}dz^3 - (n^2-n)byz^{n-2}dz^3 + y^2dz^3$, qui, à cauſe de $y = bz^n$, peut ſe changer en $\frac{2n^2y^2dz^3}{z^2} - (n^2-n).\frac{y^2dz^3}{z^2} + y^2dz^3 = (n^2+n+z^2)\frac{y^2dz^3}{z^2}$; donc $R = \frac{y.(n^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{z.(n^2+n+z^2)} = \frac{bz^{n-1}(n^2+zz)^{\frac{1}{2}}}{n^2+n+z^2}$, parce que de l'équation $y = bz^n$, l'on tire $\frac{y}{z} = \frac{bz^n}{z}$

$= b\zeta^{n-1}$. L'on a auſſi $q = \frac{d\zeta.(n^2+n+\zeta^2)}{n^2+\zeta^2}$.

Si on ſuppoſe que n eſt un nombre poſitif, on voit que q ſera toujours poſitif; donc les ſpirales compriſes dans l'équation $y = b\zeta^n$ n'ont dans ce cas aucun point d'inflexion, mais elles ſont toujours concaves vers leur foyer. Si on ſuppoſe $n = 1$, comme dans la ſpirale d'Archimede, l'on a $R = \frac{b.\sqrt{(1+\zeta\zeta)^3}}{2+\zeta\zeta}$, quantité toujours poſitive (*) & qui ne peut être ſuppoſée $= 0$, ou $= \infty$.

Car dans le premier cas on auroit $\zeta\zeta + 1 = 0$, $\zeta\zeta = -1$, & $\zeta = \pm\sqrt{-1}$; dans le ſecond cas on auroit $\zeta = \pm\sqrt{-2}$, c'eſt-à-dire, que ζ ſeroit imaginaire; donc cette ſpirale ne peut avoir ni point d'inflexion ni point de rebrouſſement. Si l'on fait $\zeta = 0$, ce qui indique le pôle de la ſpirale d'Archimede, l'on a $R = \frac{b \times 1}{2} = \frac{b}{2}$, c'eſt-à-dire, que la courbure au pôle de cette ſpirale eſt la même que celle d'un cercle dont le rayon ſeroit $= \frac{b}{2}$.

Si on ſuppoſe ζ infini, c'eſt-à-dire, ſi l'on ſuppoſe que la courbe ait fait une infinité de révolutions autour du pôle, l'on a $R = \frac{b\zeta^3}{\zeta^2} = b\zeta = \frac{b\zeta}{1}$, d'où l'on tire $1 : b :: \zeta : R$; c'eſt-à-dire, qu'alors le rayon oſculateur devient infini, & la courbure de la courbe infiniment petite, & la même que celle d'un cercle dont le rayon ſeroit

(*) Le ſigne radical ſe prend toujours ici avec le ſigne +.

une ligne quatriéme proportionnelle à l'unité, à b & à z; de même dans la parabole ordinaire dont le rayon de la courbure eſt (104) $= \frac{(yy+aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}$ $= \frac{y^3}{aa}$, lorſque $y = \infty$, la courbe eſt infiniment petite, lorſque le rayon eſt infiniment grand; mais cependant cette courbure eſt circulaire. On diſtingue ces ſortes de points, en ce qu'en ſuppoſant, ſoit l'abſciſſe x, ſoit l'ordonnée y, comme on voudra, dans le cas de la parabole, ou z dans le cas de la ſpirale d'Archimede, augmentée ou diminuée d'une petite quantité $\pm f$, le rayon oſculateur reſte infini dans les deux cas, ce qui n'arrive pas lorſqu'il s'agit d'un point d'inflexion ou de rebrouſſement, lorſque l'abſciſſe (courbe ou droite) & l'ordonnée ſont toutes les deux finies, ou qu'au moins l'une des deux eſt finie ou $= 0$. Mais il ne s'agit pas ici des points correſpondans à des co-ordonnées infinies.

Si n étant poſitive eſt plus grande ou plus petite que 1, R ſera toujours $= 0$, ou $= \infty$, lorſque z ſera $= 0$, ou lorſque $y = b z^n$ ſera $= 0$ (*), c'eſt-à-dire au pôle. Si l'on ſuppoſe z négative, ou z^{n-1} ſera une quantité négative ou poſitive; dans le dernier cas la ſpirale paſſe par le pôle à la maniere d'un arc continu.

Telles ſont toutes les ſpirales déſignées par les équations $y = b z^3$, $y = b z^5$, $y = b z^7$, &c. Dans le ſecond cas il y a un point de rebrouſſement au pôle: cela arrive dans toutes les

(*) Car ſi $n - 1 = -m$, l'on a $b z^{n-1} = b z^{-m} = \frac{b}{z^m}$ $= \infty$, en ſuppoſant $z = 0$ & m un nombre poſitif entier ou fractionnaire.

spirales $y = b z^2$, $y = b z^4$, $y = b z^6$ &c. Si z étant négatif, z^{n-1} devient imaginaire, comme si l'on avoit $y = b z^{\frac{3}{2}}$, ce qui donne $z^{n-1} = z^{\frac{1}{2}-1} = z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-z}}$, en supposant z négatif; dans ce cas R est imaginaire à cause de $\sqrt{-z}$ imaginaire, & les spirales n'ont aucun point correspondant aux z négatives. Telles sont les spirales $y = b z^{\frac{3}{2}}$, $y = b z^{\frac{5}{2}} = b z^{\frac{7}{2}}$, &c.; car en supposant z négatif & $n = \frac{3}{2}$, l'on aura $y = \pm b\sqrt{-z^3}$, quantité imaginaire.

Si n est un nombre négatif, dans ce cas il peut y avoir un point d'inflexion. En effet l'on a alors $q = \frac{dz.(n^2 - n + z^2)}{n^2 + z^2}$. Cette quantité est positive, si $(n^2 + z^2) > n$, & négative, si $(n^2 + zz) < n$. Mais z croissant continuellement, si au commencement $(n^2 + zz) < n$, il y aura un point auquel $(nn + zz)$ sera $= n$. Pour que $nn + zz$ puisse être plus petit que n, il faut que n soit fractionnaire; donc dans ce cas cette partie de la spirale qui répond à $(n^2 + zz) < n$, sera convexe vers le pôle, le reste de la spirale étant concave vers le même pôle.

Si n est négative, l'équation $y = b z^{-n}$ devient $y = \frac{b}{z^n}$, ou $z^n = \frac{b}{y}$. Si on suppose $z = 0$, l'on a $y = \infty$; au contraire pour que y devienne infiniment petit, il faut que z devienne infinie; donc dans ce cas la spirale ne peut atteindre le pôle qu'après avoir fait une infinité de révolutions (*).

143. Parlons maintenant des points de rebrouf-

(*) La fig. 128 peut donner une idée des spirales qui passent par le pôle C en forme d'arc continu. Si l'on a $y = z^{\frac{1}{2}}$,

ſement qui ſont formés par deux branches DM, D*m* (fig. 130 & 131), qui quoiqu'appartenantes à une même courbe, ſont cependant déſignées par des équations différentes. Lorſque les branches ſe tournent leurs convexités, elles forment un *point de rebrouſſement ſimple ou de la premiere eſpéce; mais le point de rebrouſſement eſt de la ſeconde eſpéce*, ſi l'une des branches tourne ſa convexité vers la concavité de l'autre, comme il arrive (fig. 131). Les branches MD, *m* D ſont terminées au point D de rebrouſſement; donc les ordonnées qui répondent à des abſciſſes, priſes en deçà, doivent être imaginaires. Au contraire dans la fig. 132 les ordonnées correſpondantes aux x (A*p*), ſituées

---

AP étant $= +z$ & A*p* $= -z$, l'on prendra C*m* $= y = b \times -z^3 = -bz^3$ ſur le prolongement du rayon *p*C. La figure 129 peut repréſenter les ſpirales des équations $y = bz^2$, $y = bz^4$, &c. Si l'on fait AP $=$ A*p* & $n = 2$, l'on aura $z^2 = (-z)^2 = z^2$ & C*m* $=$ C*i*. La fig. 128. B peut repréſenter celles qui n'ont aucune ordonnée correſpondante aux z négatives. Si on prend le radical pair avec le ſigne $\pm$, & qu'on ait $y = bz^{\frac{3}{2}}$, ou $y = \pm b\sqrt{z^3}$, à chaque abſciſſe AP, il répondra deux ordonnées, l'une poſitive C*i*, l'autre négative C*o*, la courbe aura au pôle C un point ſingulier dont il ſera facile de connoître la nature, en faiſant attention à la figure, & à la ſituation des arcs qui le forment; & les branches ſeront concaves vers le pôle, puiſque chaque point *i* & *o* de la courbe ſera ſitué entre le pôle C & la tangente correſpondante, menée par un autre point infiniment proche de *i* ou de *o*.

Mais dans ce cas les ſpirales ont deux branches (déſignées par deux équations différentes) qui ſont toutes les deux terminées au pôle, & en ne conſidérant qu'une ſeule branche, ces courbes ſont terminées au pôle; or dans le problême, on ne conſidere qu'une ſeule branche. Si $n = \frac{1}{2}$, l'on aura $\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, & pour ce cas, en ſuppoſant z négatif, z^{n-1} ſera $\sqrt{-z^3}$, quantité imaginaire.

au-delà de A, ſeront imaginaires. Les rebrouſſemens ſimples ſe trouveront toujours, en cherchant les x que donneront les $R = 0$, ou $= \infty$. Car il eſt aiſé de voir que ſi la fig. 112 etoit ſituée comme la fig. 132, à chaque abſciſſe AP il répondroit une double ordonnée PM, Pm; de ſorte que l'équation qui auparavant (fig. 112) déſignoit la dourbe mDM; de maniere que y étoit une fonction de x, qui ne renfermoit aucun radical pair, en renfermera néceſſairement, lorſque cette courbe étant rapportée à l'axe DP, aura la ſituation de la fig. 132 ou de la fig. 130. En effet ſuppoſons que l'équation de la courbe de la fig. 112 ſoit $y^3 = ax^2 = x^2$, en ſuppoſant $a = 1$, l'on aura $y = \sqrt[3]{x^2}$; mais en changeant y en x, l'on a $y^2 = x^3$, $y = \pm \sqrt{x^3}$; donc à chaque abſciſſe AP ou DP (fig. 130), il répond deux ordonnées, l'une poſitive PM, l'autre négative Pm; & en ſuppoſant que les DP ſont poſitifs, l'on aura les D$p = -x$, & les y correſpondans à Dp ſeront $y = \pm \sqrt{-x^3}$, quantité imaginaire, qui fait voir que les branches de la courbe ſont terminées en D. Mais que la courbe ſoit ſituée, comme elle l'eſt (fig. 112), ou comme dans la fig. 130, le rayon oſculateur correſpondant au point de rebrouſſement D, ſe trouvera, en ſuppoſant $R = 0$, ou $R = \infty$. Suppoſons que b ſoit la valeur de x trouvée par l'une de ces ſuppoſitions, on examinera ſi en ſubſtituant $b + f$ au lieu de x, les R deviennent imaginaires, lorſque f eſt poſitive, ſans le devenir lorſque f eſt négative ou réciproquement, dans ce cas l'on eſt ſûr d'un point de rebrouſſement. Suppoſons que f négative rende R imaginaire dans les deux branches déſignées par le double ſigne $\pm$ du radical pair, on examinera ſi en ſuppoſant f poſitive, les rayons R correſpondans aux deux

branches ſont l'un poſitif, l'autre négatif; dans ce cas les rebrouſſemens ſeront de la premiere eſpéce. Mais ſi les R étoient alors tous les deux poſitifs, l'on auroit un rebrouſſement de la ſeconde eſpéce, dont les branches auroient la ſituation déſignée par la fig. 131. Si les R étoient tous les deux négatifs, les branches ſeroient ſituées comme dans la fig. 133. Si on trouvoit le rayon R négatif pour une des branches, & poſitif pour l'autre, ce ſeroit une marque que les branches s'uniroient enſemble en D ſous la forme d'un arc continu (fig. 134).

A l'égard des ſpirales qui ont un point de rebrouſſement de la premiere eſpéce au pôle C (fig. 129), nous en avons déja parlé ſuffiſamment.

144. PROBLÊME. *Trouver ſi la courbe de l'équation* $ay^2 = x^3$ *ou* (*en faiſant* $a = 1$) $y^2 = x^3$, *a un point de rebrouſſement de la premiere eſpéce.* Je cherche la valeur de y en x, & j'ai $y = \pm \sqrt{x^3}$; donc $dy = \pm \frac{3}{2} . x^{\frac{3}{2}-1} dx$, $dy^2 = \frac{9}{4} . dx^2 . x^{\frac{6}{2}-2}$ $= \frac{9}{4} . x\, dx^2$, $ddy = \pm \frac{3}{4} dx^2 . x^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{3\, dx^2}{4\sqrt{x}}$, $ds^3 = dx^3 (1 + \frac{9}{4} x)^{\frac{3}{2}} = dx^3 . \left(\frac{4+9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ $= \frac{1}{8} dx^3 (4 + 9x)^{\frac{3}{2}}$; $-dx\, ddy = \mp \frac{3\, dx^3}{4\sqrt{x}}$. donc $R = \frac{ds^3}{-dx\, ddy} = \mp \frac{1}{3} \sqrt{x} . (4 + 9x)^{\frac{3}{2}}$. Si l'on ſuppoſe $x = 0$, l'on a $R = 0$ pour les deux branches déſignées par le double ſigne $\pm$; ſi l'on ſuppoſe x poſitif, R ſera négatif pour la branche $y = + \sqrt{x^3}$, & poſitif pour la branche $y = - \sqrt{x^3}$; donc la premiere a ſa concavité tournée vers le haut, & la ſeconde a ſa concavité tournée vers le bas. Si on ſuppoſe l'abſciſſe x négative,

négative, le facteur $\sqrt{x}$ devient imaginaire ; donc à x négatif il ne répond aucune branche ni aucun rayon osculateur. La fig. 130 représente la courbe de l'équation $ayy = x^3$; donc la courbe proposée a un point de rebroussement de la premiere espéce.

Pour avoir le rayon osculateur au point D (fig. 131 & 133) de rebroussement de la seconde espéce, on cherchera par l'équation de la courbe la valeur de y en x, & cette valeur renfermera nécessairement un radical pair avec le double signe $\pm$. La quantité renfermée sous le signe deviendra $= 0$ au point D ; la valeur de R sera la même à ce point, & les signes de R seront les mêmes au points M, m des deux branches, en prenant ces points fort proches de D, c'est-à-dire, en ajoutant une petite quantité f à l'abscisse correspondante au point D, pourvu que f positive seulement ou f négative seulement, rende P imaginaire.

La résolution du problême suivant suffira pour faire comprendre comment on peut s'y prendre pour trouver ces sortes de rebroussemens, lorsque les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses.

145. PROBLÊME. *Trouver si la courbe de l'équation* $y = a + x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$, *ou* $y = a + x^2 \pm \sqrt{x^5}$ *a un point de rebroussement de la seconde espéce.* Je cherche le rayon osculateur des deux branches de cette courbe. J'ai d'abord $dy = 2x\,dx \pm \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} dx$, $ddy = 2\,dx^2 \pm \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}}\,dx^2$ (en supposant dx constant), & $dy^2 = (4x^2 \pm 10x^{\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}x^3)$; donc $ds^3 = (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = dx^3 (1 + 4x^2 \pm 10x^{\frac{3}{2}} + \frac{25}{4}x^3)^{\frac{3}{2}}$, $-dx\,ddy = dx^3 (-2 \mp \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}})$,

$$R = \frac{ds^3}{-dx\,ddy} = \frac{(1 + 4x^2 \pm 10x^{\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}x^3)^{\frac{3}{2}}}{-2 \mp \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}}.$$

Les signes supérieurs appartiennent à la branche supérieure de la courbe & les inférieurs à la branche inférieure. Maintenant si la courbe a un point de rebroussement de la seconde espéce, il doit être situé au point auquel l'on a $+\sqrt{x^5} = -\sqrt{x^5}$, ou auquel $x = 0$. Or à ce point l'on a $R = \frac{1}{-2}$ pour les deux branches; donc chacune de ces branches a dans ce point une courbure égale à celle d'un cercle dont le rayon seroit $= \frac{1}{2}$. Le signe — indique que les branches tournent leur concavité vers le haut. Si on suppose $x = -f$, la quantité $x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x^5}$, devient $= \sqrt{-f^5}$, quantité imaginaire; de même $x^{\frac{1}{2}}$ devient imaginaire, & il est aisé de voir que le rayon R correspondant est alors imaginaire. Si l'on suppose $x = +f$, f étant une quantité fort petite, le numérateur sera positif pour les deux branches, le dénominateur étant négatif. Il le sera aussi pour la branche inférieure, tant que $-2 + \frac{15}{4}.x^{\frac{1}{2}}$ sera négatif, ou tant que $15x^{\frac{1}{2}}$ sera < 8, ou $x^{\frac{1}{2}} < \frac{8}{15}$, ou $x < (\frac{8}{15})^2 = \frac{64}{225}$; donc la courbe proposée a un point de rebroussement de la seconde espéce.

La fig. 133 représente la courbe proposée; mais on doit faire AD $= a$. Il peut arriver que les branches DM, D m d'une courbe qui a un point de rebroussement de la seconde espéce, ayent aussi quelque point singulier que l'on trouvera pour chacune de ces branches par la méthode ci-dessus. En général quelle que soit la grandeur du rayon oscu-

lateur correſpondant au point D, en cherchant R pour les points *m* & M fort proches de D, & dont l'un appartient à une branche, & l'autre à l'autre branche de la courbe, on trouvera facilement de quel côté ces branches tournent leur convexité & l'eſpéce du point de rebrouſſement

Si au lieu de l'équation $y = a + x^{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{x^3}$ l'on avoit eu $y = a + (x-c)^{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{(x-c)^3}$, en faiſant $x - c = z$, l'on auroit eu $y = a + z^{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{z^3}$, & parce qu'au point cherché la quantité qui eſt ſous le ſigne $\pm \sqrt{z^3}$ doit être $= 0$, on auroit $x - c = 0$, $x = c$; & il eſt aiſé de voir qu'on ne peut ſuppoſer $x < c$, autrement $\sqrt{(x-c)^3}$ ſeroit imaginaire. L'on trouveroit de même que la courbe a un point de rebrouſſement de la ſeconde ſorte au point déſigné par $z = 0$, ou $x = c$.

Si les x & les y étoient mêlés enſemble, on chercheroit y en x, en regardant y comme l'inconnue.

REMARQUE. Selon M. le Marquis de l'Hôpital (analyſe des infiniment petits, n°. 109), pour avoir ces ſortes de points, l'on doit différencier l'expreſſion générale du rayon oſculateur. Cette différence étant égalée à 0, donne $ddy.(dx^2 + dy^2) - 3dyddy^2 = 0$ (en faiſant dx conſtant). Au point cherché, ſelon l'Auteur dont on vient de parler, l'on doit faire cette quantité $= 0$ ou $= \infty$, & regarder le rayon oſculateur correſpondant comme un *maximum* ou un *minimum* (*). Mais il eſt aiſé de voir que cette méthode, qui doit ordinairement entraîner des calculs très-pénibles, ne peut faire diſtinguer un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpéce d'un point auquel une courbe a un *maximum* ou un *minimum* de rayon oſculateur. De plus une courbe peut avoir des rayons oſculateurs qui ſoient des *maxima* ou des *minima*, ſans avoir aucun point de rebrouſſement de la

(*) M. le Marquis de l'Hôpital ne fait aucune application de ſa méthode.

seconde espéce, & la méthode de ce grand Géomêtre ne peut faire distinguer une courbe qui a un tel point de rebroussement de celle qui n'en a pas.

REMARQUE II. Si l'on vouloit avoir les points de rebroussement de la premiere ou de la seconde espéce d'une courbe rapportée à son foyer, voici comment on pourroit s'y prendre. Soit, par exemple, la courbe $y = a + z^2 \pm z^{\frac{3}{2}}$, en supposant que z est un arc de cercle dont le rayon $= 1$, on feroit attention qu'à cause de $z^{\frac{3}{2}} = \sqrt{z^3}$, z ne peut être négative; ainsi si cette courbe a un point de rebroussement, elle doit l'avoir au point correspondant à $z = 0$, ou à $y = a$; en second lieu on chercheroit la valeur générale de R; on examineroit si au point dont on vient de parler R est $= 0$, ou $= \infty$, ou si R est une quantité finie. On examineroit aussi ce que devient R, en faisant $z = +f$, f étant une quantité fort petite. Si les signes de R sont les mêmes pour les deux branches, l'on a un point de rebroussement de la seconde espéce, & les deux branches sont concaves ou convexes vers le foyer, selon que les signes de R sont à la fois positifs ou négatifs; si les signes sont différens, & que $R = 0$, ou $= \infty$, l'on a un point de rebroussement de la premiere espéce.

146. PROBLÊME. *Trouver si la courbe dont l'équation est* $y = a \pm \sqrt{z^3}$ *rapportée a un foyer, & z étant un arc de cercle dont le rayon* $= 1$ *a un point de rebroussement, & de quelle espéce il est.* L'on aura $dy = \pm \frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} dz$, $dy^2 = \frac{9}{4} z\, dz^2$, $ddy = \pm \frac{3}{4} z^{-\frac{1}{2}} dz^2$, en supposant dz constant; substituant ces valeurs de y, dy, ddy dans la formule ci-

dessus $R = \frac{(dy^2+y^2dz^2)^{\frac{3}{2}}}{2dy^2dz+y^2dz^3-ydzddy}$, l'on a $R = \frac{(\frac{25}{4}z^3+aa\pm 2az^{\frac{5}{2}}+z^5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{25}{2}z^3+aa\pm 2a\sqrt{z^5}+z^5\mp\frac{15}{4}a\sqrt{z}-\frac{15}{4}z^3}$. Si l'on fait z négatif, R deviendra imaginaire; si l'on fait $z=+f$, f étant supposée assez petite pour que tous les termes qui sont affectés de z disparoissent devant aa, l'on aura $R = \frac{a^3}{aa} = a$; ce sera la même chose, si on suppose $z=0$; donc la courbe proposée a un point de rebroussement de la seconde espéce; les branches de la courbe tournent leur concavité vers le foyer, & leur courbure au point de rebroussement est la même que celle d'un cercle dont le rayon seroit $= a$.

Pour décrire cette courbe, je décris (fig. 135) un cercle AP avec le rayon $AC = 1$; je prends $CD = a$, tirant ensuite une ligne indéfinie CP, je fais $AP = z$, $CM = a+\sqrt{z^5}$, $Cm = a-\sqrt{z^5}$, les points m & M appartiennent à la courbe.

147. PROBLÈME. *Chercher si la courbe de l'équation* $y = a \pm z^{\frac{7}{5}}$ *a un point de rebroussement de la premiere ou seconde espéce au point désigné par* $z=0$, *la courbe est rapportée à un foyer, &* z *est un arc décrit avec un rayon* $=1$. Cherchez les valeurs de y, dy^2, ddy, substituez-les aussi bien que la valeur de dy dans la formule qui convient à ce cas, en faisant dz constant, il viendra $R = \frac{(\frac{49}{25}z^5+aa\pm 2az^{\frac{7}{2}}+z^7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{49}{2}z^5+aa\pm 2az^{\frac{7}{2}}+z^7\mp\frac{35}{4}az^{\frac{5}{2}}-35z^5}$. Si l'on fait z négative, R devient imaginaire; si l'on fait $z=0$, l'on a $R = \frac{a^3}{aa} = a$. Si l'on suppose

$\zeta = f$, f étant une quantité positive très-petite, le numérateur & le dénominateur de la valeur de R restent positifs; donc la courbe a un point de rebroussement de la seconde espéce, & les deux branches de la courbe ont leur concavité tournée vers le foyer (*).

Mais si l'équation de la courbe étoit $y = \frac{\zeta\zeta}{a}$, la spirale M C i (fig. 129) auroit un point de rebroussement de la premiere espéce situé au pôle C; & soit qu'on prenne l'arc $\zeta =$ AP, ou $=$ Ap, c'est-à-dire, positif ou négatif, le rayon y sera toujours positif.

Des usages du Calcul différentiel dans l'Algébre.

148. PROBLÈME. *Elever le binome $a + b$ à la puissance m.* L'on sait qu'en élevant $1 + a$ au quarré, au cube, &c. le premier terme sera toujours $= 1$. Cela posé, supposons $(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5$ &c. (**), en prenant les différentielles, l'on aura $m.(1+x)^{m-1}dx = A\,dx + 2B\,x\,dx + 3C\,x^2\,dx + 4D\,x^3\,dx +$ &c. ou en divisant par $a\,x$, $m.(1+x)^{m-1} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3\,dx$ (P). Cette équation devant avoir lieu, quelle que soit la valeur de x, on peut supposer $x = \frac{1}{\infty}$, ou, si l'on veut, $= 0$, & dans ce cas tous les termes qui

(*) Toutes les paraboles, excepté la vulgaire, ayant le rayon osculateur qui répond à leur sommet $= 0$, ou $= \infty$ (135), il paroît que l'on peut conclure que tout point d'une branche de courbe (dans une espace fini) auquel le rayon osculateur est $= 0$, ou $= \infty$, a une courbure semblable à la courbure au sommet de quelque parabole différente de la vulgaire; mais on sait que toutes les paraboles, excepté la vulgaire, ont à leur sommet un point de rebroussement ou un point d'inflexion (visible ou invisible). Si donc on trouve que le rayon osculateur d'une branche de courbe correspondant à un point donné est $= 0$, ou ∞, & qu'en même temps on ne trouve pour ce point ni point de rebroussement, ni point d'inflexion visible, ne peut-on pas conclure que c'est un point de serpentement?

(**) Cette supposition est possible, puisque les coefficiens indéterminés, A, B, C, D, &c. peuvent représenter des quantités quelconques.

suivent A s'évanouissent ; & en divisant par m, l'on a $(1+x)^{m-1}$ ou $(1+0)^{m-1} = \frac{A}{m}$ ou $1 = \frac{A}{m}$; donc $A = m$. Différenciant l'équation P, l'on a $m.(m-1).(1+x)^{m-2} \times dx = 2B\,dx + 6C\,x\,dx + 12D\,x^2\,dx +$ &c ; divisant par dx, & supposant $x = 0$, l'on a $m.(m-1) = 2B$, ou $B = \frac{m.(m-1)}{2}$. En continuant de même, l'on trouvera

$$C = \frac{m.(m-1).(m-2)}{6} = \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$$

$$D = \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4}$$, & ainsi de suite.

Maintenant si l'on fait attention que $(a+b)^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$, & qu'on suppose $\frac{b}{a} = x$, l'on aura $(1+x)^m = \left(1+\frac{b}{a}\right)^m = 1 + m\frac{b}{a} + \frac{m.(m-1)}{1.2} \times \frac{b^2}{a^2} +$ &c. & $1\left(+\frac{b}{a}\right)^m\ a^m = (a+b)^m = a^m + m\frac{b\,a^m}{a} + \frac{m.(m-1)}{1.2} \cdot \frac{b^2\,a^m}{a^2} +$ &c. $= a^m + m\,b\,a^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.2} \times b^2\,a^{m-2} + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}\,b^3\,a^{m-3} +$ &c. (*).

Si on vouloit avoir la valeur de $(a-b)^m$, on mettroit le signe — devant tous les termes de rang pair, c'est-à-dire, qu'on feroit le second, le quatriéme, le sixiéme, &c. termes négatifs, parce que b s'y trouve avec un exposant impair ; or une puissance impaire d'une quantité négative est négative ; donc $(a-b)^m = a^m - m\,b\,a^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.2}\,b^2 \times a^{m-2} -$ &c.

La méthode que l'on vient de donner pour élever un binome à la puissance m, suppose que m est un nombre ra-

(*) C'est la formule qu'on a trouvée dans l'Algébre par un calcul bien plus pénible.

tionnel positif ou négatif, entier ou fractionnaire, & il est alors facile de voir que $d.(1+x)^m = m.(1+x)^{m-1}$, indépendamment de la démonstration qu'on en a donnée ci-dessus. En effet de ce que la différence de x^2 est $2x^{2-1}dx$, celle de x^3 étant $3x^{3-1}dx$, &c. on peut conclure par analogie que celle de x^m est $m.x^{m-1}dx$, & que celle de $(1+x)^m$ est $m.(1+x)^{m-1}dx$, m étant un nombre entier ou fractionnaire positif ou négatif.

Mais pour démontrer rigoureusement que la même chose a lieu en supposant que m est un nombre quelconque & même sourd, tel que $\sqrt[5]{3}$, mettons dans le binome $a+b$, x au lieu de a. Cela posé, je dis que l'on aura $(x+b)^m = x^m + mx^{m-1}b + \frac{m.(m-1)}{2}x^{m-2}b^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}x^{m-3} \times b^3$ &c. en supposant même que m est un nombre irrationel. Supposons que L. désigne le logarithme hyperbolique & que l'on ait $L.(x+b)^m$ ou $m\,L.(x+b) = L.(x^m + mx^{m-1}b + \frac{m.(m-1)}{2}x^{m-2}b^2 +$ &c.). Prenez les différentielles de ces logarithmes, en supposant x variable & b constant, vous aurez $\frac{m.dx}{x+b}$ (*) $=$

$$\frac{mx^{m-1}dx + m.(m-1)bx^{m-2}dx + \frac{m.(m-1).(m-2).b^2}{2}x^{m-3} + \&c.}{x^m + mbx^{m-1} + \frac{m.(m-1).b^2x^{m-2}}{2} + \&c.}$$

Multipliant le numérateur mdx par $x^m + mbx^{m-1} +$ &c. & le second membre par $x+b$, ou, ce qui revient au même, ôtant les fractions, il vient $mx^m dx + m^2bx^{m-1}dx + \frac{m^2(m-1)}{2}b^2x^{m-2}dx +$ &c. $= mx^m dx + m.(m-1) \times bx^{m-1}dx + \frac{m.(m-1).(m-2)}{2}b^2x^{m-2}dx +$

(*) La différentielle d'une quantité logarithmique, selon ce qu'on a vu ci-dessus, est égale à la différentielle de cette quantité divisée par la quantité elle-même.

&c. (*) $+ m b x^{m-1} dx + m.(m-1) b^2 x^{m-2} dx +$ &c. En réduiſant dans le ſecond membre les termes ſemblables en une ſomme, l'on a $m x^m dx + m. m b x^{m-1} dx + \frac{m^2.(m-1).b^2 x^{m-2} dx}{2} +$ &c. quantité identique avec le premier membre; donc la ſuppoſition d'où l'on a déduit cette derniere équation eſt vraie : car en rétrogradant, l'on peut revenir à l'équation $(x+b)^m = x^m + m x^{m-1} b + \frac{(m.m-1)}{2} b^2 x^{m-2}$ &c. donc en ſubſtituant a au lieu de x, l'on aura $(a+b)^m = a^m + m b a^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{2} b^2 a^{m-1} +$ &c. en ſuppoſant même que m eſt un nombre irrationel.

Uſage du Calcul différentiel dans la recherche des racines des équations.

149. Soit ſuppoſée l'équation $x^n - A x^{n-1} + B x^{n-2} - C x^{n-3} + D x^{n-4} -$ &c. $= o$ (M), dont les racines ſoient $p, q, r, s, t,$ &c. de maniere que p ſoit la plus petite, q celle qui vient après & ainſi de ſuite. Suppoſons que toutes les racines de l'équation propoſée ſont réelles, & regardons-les comme inégales, & s'il y en a d'égales, ſuppoſons que leur différence eſt infiniment petite. Par la nature des équations, la propoſée ne peut être $= o$, à moins que x n'ait pour valeur quelques-unes des racines $p, q,$ &c. Suppoſons en général que $x^n - A x^{n-1} + B x^{n-2}$ &c. eſt $= z$; & imaginons qu'au lieu de x on ſubſtitue dans la fonction z différentes valeurs déterminées à commencer depuis $-\infty$, en allant vers les nombres poſitifs (**), il eſt viſible que z ne deviendra $= o$ que lorſqu'on ſubſtituera p, ou q, ou r, &c. au lieu de x, & qu'auparavant z acquerera différentes valeurs plus grandes ou plus petites que o. En prenant des valeurs plus grandes que p & plus petites que q, les valeurs de z

(*) On doit multiplier tout le numérateur du ſecond membre par x & encore de nouveau par b.

(**) On conſidere ici les quantités négatives comme plus petites que o.

ſeront poſitives ou négatives juſqu'à ce qu'on ſubſtitue q au lieu de x, & alors l'on aura $z = 0$: mais les valeurs de z n'ont pu paſſer de 0 à ∞, à moins que dans cet intervalle z n'ait eu pour valeur un *maximum* ou un *minimum*. Ce ſera un *maximum*, ſi les valeurs de z étoient poſitives, & un *minimum* (*), ſi elles étoient négatives, pendant que x a une valeur intermédiaire entre p & q: ce ſera la même choſe dans le paſſage de q à r. Mais parce que, comme on l'a dit ci-deſſus (81), les *maxima* & les *minima* ſe ſuivent alternativement, ſi z a été un *maximum* entre p & q, elle deviendra un *minimum* entre q & r, ou réciproquement & ainſi de ſuite.

Donc puiſque entre les racines priſes deux à deux z a pour valeur un *maximum* ou un *minimum*, le nombre des *maxima* & des *minima* qui ſont dans z ſera plus petit au moins d'une unité que le nombre des racines réelles, & les *maxima* & les *minima* ſe ſuivront de maniere que les premiers ſeront poſitifs & les derniers négatifs; réciproquement ſi la fonction z a un *maximum* ou du moins une valeur poſitive, en ſuppoſant $x = f$, & un *minimum* ou du moins une valeur négative, en faiſant $x = g$, il eſt néceſſaire que x paſſant de f en g, z paſſe du poſitif au négatif, & que dans cet intervalle z devienne $= 0$. Donc il y aura une racine contenue entre f & g. Mais cette concluſion n'a lieu qu'en ſuppoſant que les *maxima* & les *minima* deviennent alternativement poſitifs & négatifs; car ſi z a quelque *minimum* poſitif, il peut ſe faire que z paſſe du *maximum* au *minimum* ſuivant, ſans paſſer par 0.

Au reſte il y aura toujours entre deux racines un *maximum* ou un *minimum*, quand même toutes les racines ne ſeroient point réelles. Mais on ne peut pas conclure qu'entre deux *maxima* ou deux *minima* quelconques il y ait une racine réelle, à moins qu'une des valeurs de z ſoit poſitive & l'autre négative.

Si l'on différencie l'équation ci-deſſus, & qu'on faſſe $dz = 0$, l'on aura $dz = 0 = nx^{n-1}dx - (n-1) \times A x^{n-2} dx + (n-2).B x^{n-3} dx$ &c., ou en diviſant par dx, $nx^{n-1} - (n-1).A x^{n-2} + (n-2).B x^{n-3}$ — &c. $= 0$ (P). Les racines de cette équation donneront

(*) On prend ici un nombre négatif pour un *minimum*, dans le ſens de M. Euler.

les *maxima* & les *minima* de z, ainſi qu'il ſuit de ce qu'on a dit ci-deſſus ſur les *maxima* & les *minima*. Donc les racines de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0 = nx^{n-1} - (n-1) \times A x^{n-2}$ &c. dont le nombre eſt $= n-1$, ſeront les *maxima* ou les *minima* de z; & ſi les racines de l'équation $z = 0$ ſont toutes réelles, alors toutes les racines de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ ſeront auſſi réelles; car z ayant autant de *maxima* ou de *minima* que $n-1$ contient d'unités (*), il eſt néceſſaire que l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ ait un égal nombre de racines réelles; donc toutes ſes racines ſont réelles; donc on peut établir la régle ſuivante.

Si toutes les racines de l'équation $z = 0$ *ſont réelles, toutes les racines de* $\frac{dz}{dx} = 0$ *le ſeront auſſi; d'où il ſuit réciproquement que ſi toutes les racines de l'équation* $\frac{dz}{dx} = 0$ *ne ſont pas réelles, toutes celles de l'équation* $z = 0$ *ne le ſeront pas non plus.* Mais il peut ſe faire que toutes les racines de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ ſoient réelles, quoique toutes celles de l'équation $z = 0$ ſoient imaginaires.

REMARQUE. Si l'on a l'équation $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ & qu'on faſſe $x = \frac{1}{y}$, elle deviendra $\frac{1}{y^3} - \frac{A}{y^2} + \frac{B}{y} - C = 0$, ou $1 - Ay + By^2 - Cy^3 = 0$, & ſi les racines x de la premiere ſont réelles, celles de la ſeconde qui ſont égales à $\frac{1}{x}$ le ſeront auſſi; de ma-

(*) On ſuppoſe que les racines de $\frac{dz}{dx} = 0$ ſont inégales; s'il y en a d'égales, il faudra faire les exceptions dont on a parlé ci-deſſus.

niere que celles d'une de ces équations ſont égales à l'unité diviſée par celles de l'autre équation, ou que celles de l'une ſont les réciproques de celles de l'autre. Réciproquement de l'équation $1 - Ay + By^2 - Cy^3 = 0$, on peut, en ſubſtituant $\frac{1}{x}$ pour y, repaſſer à l'équation $x^3 - Ax^2 +$ &c. $= 0$.

Si l'on ſubſtitue $\frac{1}{y}$ au lieu de x dans la propoſée M ci-deſſus, l'on aura $1 - Ay + By^2 -$ &c $= 0$; différenciant cette équation, diviſant par dy & remettant x au lieu de $\frac{1}{y}$, ou $\frac{1}{x}$ au lieu de y, l'on aura, en changeant tous les ſignes, l'équation P ci-deſſous.

Différenciant cette équation & celle qui en réſultera, & faiſant les opérations néceſſaires, l'on aura, en changeant les ſignes, les équations qu'on voit ici.

(P) $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} -$ &c. $= 0$.

(R) $Ax^{n-2} - \frac{2(n-2)}{n-1}.Bx^{n-3} + \frac{3(n-2).(n-3)}{(n-1).(n-2)}.Cx^{n-4} -$ &c. $= 0$.

(S) $Ax^{n-3} - \frac{2(n-3)}{n-1}.Bx^{n-4} + \frac{3(n-3).(n-4)}{(n-1).(n-2)}.Cx^{n-5} -$ &c. $= 0$.

(V) $Ax^{n-4} - \frac{2(n-4)}{n-1}.Bx^{n-5} + \frac{3(n-4).(n-5)}{(n-1).(n-2)}.Cx^{n-6} -$ &c. $= 0$.

Et en général en ſuppoſant que m eſt un nombre entier plus petit que n, l'on aura, en ſubſtituant m pour $n-1$, ou $n-2$, ou $n-3$ &c. l'on aura, dis-je, (Z) $Ax^m - \frac{2m}{m-1} \times Bx^{m-1} + \frac{3m.(m-1)}{(n-1).(n-2)}.Cx^{m-2} -$ &c. $= 0$. Or il eſt évident, par ce qu'on vient de dire, que ſi toutes les racines de l'équation $z = 0$ ſont réelles, toutes celles de l'équation P le ſeront, toutes celles de l'équation R, de l'équation S, de l'équation V, le ſeront auſſi, & que ſi l'équation (Z) a des racines imaginaires, la propoſée en aura auſſi. Si on ſuppoſe $m = 2$, l'on aura $Axx - \frac{4}{n-1}.Bx + \frac{6C}{(n-1).(n-2)} = 0$. Si l'on réſout cette équation par la méthode ordinaire du ſecond degré, l'on verra aiſément que ſes racines ſont imaginaires

toutes les fois que l'on a $\frac{4B^2}{(n-1)^2} < \frac{6A.C}{(n-1).(n-2)}$ (*); donc en diviſant par 4 & multipliant par $(n-1)^2$, l'on aura $BB > \frac{3(n-1).AC}{2(n-2)}$, ſi toutes les racines de l'équation propoſée ſont réelles; autrement il y aura au moins deux racines imaginaires. Si $n = 3$, pour qu'il n'y ait point de racines imaginaires dans la propoſée, il faut qu'on ait $BB > 3AC$; ſi $n = 4$, l'on doit avoir $BB > \frac{3.3}{2.2}.AC$; Si $n = 5$, l'on doit avoir $BB > \frac{3.4}{2.3}.AC$; &c.

Par ce qu'on vient de dire, l'on peut démontrer que ſi toutes les racines d'une équation $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c. $= 0$ ſont réelles, il y aura autant de racines poſitives qu'il y a de changemens de ſigne, & autant de racines négatives qu'il y a de ſucceſſion de même ſigne. Comme nous avons parlé de cette régle dans notre Algébre, il ne ſera pas inutile d'en donner ici une démonſtration tirée des principes du calcul différentiel.

150. Suppoſons que l'équation $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} +$ &c. $= 0$ ait toutes ſes racines réelles & poſitives, ſon équation différentielle $nx^{n-1} - (n-1).Ax^{n-2} + (n-2.B)x^{n-3}$ &c. $= 0$, aura auſſi toutes ſes racines réelles & poſitives, comme il ſuit de ce qu'on a dit ci-deſſus (149), & les racines de celles-ci ſeront les limites des racines de la propoſée; de maniere par exemple que ſi les racines de celles-ci ſont 20, 15, 10, 7, la propoſée aura cinq racines, dont une ſera compriſe entre ∞ & 20, la ſeconde entre 20 & 15, la troiſiéme entre 15 & 10, la quatriéme entre 10 & 7, la cinquiéme entre 7 & $-\infty$. En effet les valeurs de x vont de $-\infty$ juſqu'à la plus petite racine qui rend la propoſée $= 0$, avant que la valeur de z, dont on a parlé ci-deſſus (149), devienne un *maximum* ou un *minimum*, c'eſt-à-dire, avant que l'on ait $x = 7$. Il y aura

(*) Comme on ſuppoſe les racines inégales, cette ſuppoſition eſt poſſible; ſi l'on avoit $\frac{4B^2}{(n-1)^2} = \frac{6AC}{(n-1).(n-2)}$, les deux racines de l'équation Ax^2 &c. $= 0$ ſeroient égales.

une autre racine entre $x = 7$ & $x = 10$, une autre entre $x = 10$ & $x = 15$, une autre entre $x = 15$ & $x = 20$, & enfin la cinquiéme entre $x = 20$ & $x = \infty$.

Si l'on ſuppoſe $x = \frac{1}{y}$, la propoſée deviendra $1 - Ay + By^2 - Cy^3 + \&c. = 0$, dont toutes les racines ſeront auſſi réelles, mais réciproques; de maniere que les plus grandes y répondront aux plus petites x, puiſque $x = \frac{1}{e}$ & $y = \frac{1}{x}$.

Ces choſes ſuppoſées, en différenciant la propoſée juſqu'à ce qu'on parvienne à une équation du premier degré, l'on aura $x - \frac{1}{n} \cdot A = 0$ (*), dont la racine doit encore être poſitive; donc A eſt une quantité poſitive; donc le coefficient du ſecond terme ſera $= -A$, comme on l'a ſuppoſé, c'eſt-à-dire, que le ſecond terme aura le ſigne $-$; donc ſi le ſecond terme avoit le ſigne $+$, toutes les racines (**) de la propoſée ne ſeroient pas poſitives. Si l'équation propoſée eſt ſuppoſée ſe changer en ſa réciproque par la ſubſtitution de $\frac{1}{y}$ au lieu de x, qu'on la différencie, & qu'après l'avoir diviſée par dy l'on remette x en ſubſtituant $\frac{1}{x}$ au lieu de y, l'on aura $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - \&c. = 0$. Différenciant de nouveau juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à l'équation Z (ci-deſſus 149) ou $Ax^n - \frac{2m}{n-1} \cdot Bx^{n-1} + \&c. = 0$, qui, en ſuppoſant $m = 1$, devient $Ax - \frac{2}{n-1} B = 0$ dont la racine doit être poſitive, puiſque toutes celles de la propoſée le ſont par ſuppoſition; B ſera une quantité poſitive. Donc le troiſiéme terme de la propoſée aura

(*) Si $n = 3$, l'on aura $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$, $3x^2 dx - 2Ax dx + B dx = 0$; diviſant par dx & différenciant de nouveau, l'on trouve $3.2x - 2A dx = 0$, ou $3x - A = 0$, ou $x = \frac{1}{3}A$.

(**) On les ſuppoſe réelles.

le ſigne + ; donc le premier & le ſecond termes auront des ſignes différens ; donc ſi ces termes avoient le même ſigne, il y auroit au-moins une racine négative correſpondante à la limite indiquée par cette équation, qui ſera différente de la limite indiquée par l'équation précédente, parce qu'ici les racines ont été changées une fois en leurs réciproques ; d'où l'on conclut que ſi les trois premiers termes de l'équation avoient les mêmes ſignes, l'équation auroit deux racines négatives. Si après avoir changé la propoſée en $1 - Ay + By^2 - Cy^3 +$ &c. $= 0$ on différencie & & qu'on diviſe par dy, l'on aura $-A + 2By - 3Cy^2 +$ &c. Différenciant cette équation, diviſant par $2dy$ & remettant x, il vient $Bx^{n-2} - 3Cx^{n-3} +$ &c. Différenciant cette équation juſqu'à ce qu'on parvienne à une équation du premier degré, l'on trouvera $Bx - \frac{3C}{n-2} = 0$, dont la racine eſt poſitive, puiſque toutes celles de la propoſée le ſont ; donc le quatriéme terme aura un coefficient $- C$, c'eſt-à-dire, aura le ſigne — ; donc s'il a le ſigne + comme le troiſiéme, il y aura une racine négative indiquée par une ſucceſſion du ſigne + du troiſiéme au quatriéme terme ; & en général autant qu'il y aura de paires des ſignes poſitifs ou négatifs contigus, l'équation aura autant de racines négatives, & il y aura autant de racines poſitives qu'il y aura de changemens de ſignes d'un terme à l'autre ; donc il y aura autant de racines poſitives qu'il y aura de variations de ſignes d'un terme à l'autre. Par exemple ſi le premier terme & le ſecond ont différens ſignes, il y aura au moins une racine poſitive ; ſi le ſecond & le troiſiéme ont auſſi différens ſignes, il y en aura deux, &c. ſi tous les ſignes ſont les mêmes, toutes les racines ſeront négatives ; & *en général ſi toutes les racines d'une équation ſont réelles, elle aura autant de racines poſitives qu'il y aura de variations de ſignes, & autant de negatives qu'il y aura de ſucceſſions de ſignes dans l'équation.* Cela n'a point lieu quand il y a des racines imaginaires. Paſſons maintenant aux limites des racines d'une équation.

151. PROBLÈME. *Trouver les limites des racines de l'équation* $x^4 - 14xx + 24x - 12 = 0$. Si au lieu de 0 l'on écrit z & que l'on différencie, l'on aura $\frac{dz}{dx} = 0$

$= 4x^3 - 28x + 24 = 0$, ou $x^3 - 7x + 6 = 0$, dont les racines ſont 2, 1, — 3; ſi on les ſubſtitue dans l'équation auſſi bien que ∞ & $-\infty$ au lieu de x, l'on a

pour $x = \infty$ . . . . . $z = \infty$

$x = 2$ . . . . . $z = -4$

$x = 1$ . . . . . $z = -1$

$x = -3$ . . . . . $z = -129$

$x = -\infty$ . . . . . $z = +\infty$.

Si l'on conçoit qu'ayant pris l'abſciſſe $AP = \infty$ (fig. 136) on mene l'ordonnée $mP = \infty$, qu'à l'abſciſſe $Af = 2$ réponde l'ordonnée $fg = -4$, à l'abſciſſe $An = 1$ l'ordonnée $nM = -1$, à l'abſciſſe $Ab = -3$ l'ordonnée $bD = -129$, & à l'abſciſſe $Ap = -\infty$ l'ordonnée $ps = \infty$, il eſt viſible que l'ordonnée $mP = z$ (*) ne peut devenir de poſitive négative, à moins qu'elle ne devienne $= 0$ au point B ou la courbe coupe l'axe de x; mais parce que l'ordonnée reſte toujours négative entre $x = 2$ & $x = 1$, elle ne devient point $= 0$; donc aucun x compris entre 2 & 1 ne rencontre la courbe, & il n'y a aucune valeur de x entre 2 & 1 qui puiſſe rendre l'équation $= 0$, ou, ce qui revient au même, qui ſoit une racine de l'équation.

De même il n'y a aucune racine poſſible compriſe entre 1 & — 3; mais parce qu'en ſuppoſant $x = -\infty$, l'ordonnée correſpondante $z = +\infty$ eſt poſitive, la courbe doit couper l'axe des x en un autre point C, & les racines réelles de l'équation ſont AB & AC, ſituées l'une entre $x = \infty$ & $x = 2$, l'autre entre $x = -3$ & $x = -\infty$, les autres racines de l'équation étant imaginaires.

152. PROBLÈME. *Trouver les limites de l'équation* $x^4 - 2x^2 + 3x + 4 = 0$. On aura, en écrivant z au lieu de 0 & opérant comme dans le problême précédent, on aura, dis-je, $4x^3 - 4x + 3 = 0$: cette équation du troiſiéme degré n'a qu'une ſeule racine réelle approchée $= -1.3$.

(*) Il faut ſuppoſer qu'on a décrit la courbe de la figure 136, en prenant z pour l'ordonnée, faiſant $x^4 - 14xx + \&c. = z$, & en donnant ſucceſſivement pluſieurs valeurs à x.

Subſtituant

Subſtituant cette valeur de x dans la propoſée, auſſi bien que ∞ & $-\infty$, l'on aura

pour $x = \infty$ . . . . . $z = \infty$
$x = -1.3$ . . . . . $z = -0.32$
$x = -\infty$ . . . . . $z = +\infty$.

Donc il y a deux racines poſſibles, l'une entre $x = \infty$ & $x = -1.3$, l'autre entre $x = -1.3$ & $x = -\infty$. Ces racines ſont -1 & -4, qui rendent l'équation propoſée $= 0$; les autres ſont imaginaires.

REMARQUE. La courbe de l'équation $x^n - Ax^{n-1} + \&c. = z$ peut avoir des points multiples auxquels les x peuvent rencontrer la courbe; dans ce cas l'abſciſſe correſpondante eſt cenſée multiple. Par exemple ſi un point triple tombe ſur l'abſciſſe $x = 2$, alors il y a trois racines dont chacune eſt $= 2$. La racine qui répond au point auquel l'abſciſſe touche la courbe peut être double, quadruple, ſextuple, & ainſi de ſuite, ſelon la ſerie des nombres pairs 2, 4, 6, 8, &c. Celle qui eſt déterminée par un point dans lequel l'abſciſſe touche & coupe la courbe, eſt au moins triple; mais elle peut être quintuple, ſeptuple, &c. ſelon la ſuite des nombres impairs 3, 5, 7, &c. Or quand il y a des racines égales dans une équation, on peut les trouver par les méthodes que nous avons données dans notre Algébre ou par celle que nous donnerons dans la ſuite.

Si la courbe s'approche de la ligne des x de maniere que les points de la courbe paroiſſent ſe confondre pendant un certain intervalle avec l'axe des abſciſſes, il faut faire beaucoup d'attention pour ne pas confondre les ordonnées négatives avec les poſitives.

Si l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ donnoit pour $x = \infty$ . . $z = \infty$
$x = a$ . . $z = -A$
$x = b$ . . $z = +B$
$x = c$ . . $z = -C$
$x = -\infty$. $z = +\infty$,

l'équation $z = 0$ auroit autant de racines réelles & une de plus qu'il y auroit de lettres, a, b, c, &c. parce qu'entre ∞ & $-A$ il y a une racine réelle, & une autre entre $x = -\infty$ & $x = c$. En général

Si nous ſuppoſons que les racines réelles de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ ſont repreſentées par $x = a, b, c, d, e, f, g$, &c. on ſuppoſe que les quantités a, b, c, &c. aillent en décroiſſant, & qu'alors on ait

$$z = A, B, C, E, F, G, \text{ &c.}$$
$$- + - + - + \text{ &c. c'eſt-à-dire}$$

ſi en ſuppoſant $x = a$, z devient $= -A$, ſi en faiſant $x = b$, z devient $+C$, &c. l'équation $z = 0$ aura autant de racines réelles qu'il y a de lettres a, b, c, &c. & une de plus. Si une des lettres majuſcules n'a pas le ſigne écrit au-deſſous d'elle, elle indiquera deux racines imaginaires; ainſi ſi A avoit le ſigne $+$, entre ∞ & b il y auroit deux racines imaginaires. Si C avoit le ſigne $+$ il n'y auroit aucune racine réelle entre b & c.

Outre les racines imaginaires ainſi indiquées, l'équation $z = 0$ aura encore autant de racines imaginaires que l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$.

Si A avoit le ſigne $+$ & B le ſigne $-$, il n'y auroit que deux racines imaginaires indiquées par ces ſignes. En général les ſignes contigus pris deux à deux ſans qu'aucun ſigne ſoit répété deux fois, indiquent deux racines imaginaires s'ils ſont différens de ce qu'ils doivent être pour indiquer des racines réelles. Ainſi ſi les quatre premiers ſignes étoient $+ - + -$, ils indiqueroient 4 & non 8 racines imaginaires; car ſi l'équation z a un nombre n de racines, l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ aura $n - 1$ racines; donc il peut y avoir $n - 1$ lettres a, b, c, &c; donc ſi chacun des ſignes $+ - + -$ déſignoit deux racines imaginaires, l'équation z pourroit avoir $2n - 2$ racines imaginaires; ce qui eſt faux: car ſi $n = 7$, $2n - 2$ ſera $= 12$; or une équation du ſeptiéme degré ne peut avoir 12 racines imaginaires. Si $x = b$, par exemple, rendoit $z = B = 0$, alors l'équation $z = 0$ auroit des racines égales; car ſi l'équation z avoit un facteur $(x - b)^n = 0$, en différenciant, l'on auroit $n.(x - b)^{n-1} dx$; donc le facteur $(x - b)^{n-1}$ ſe trouveroit dans l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$, qui auroit autant de racines égales qu'il y a d'unités dans $n - 1$,

Si $n = 2$, cette équation auroit une racine indiquée par la valeur de $x = b$, qui rend $z = B = 0$. Si $n = 3$, alors l'équation $\frac{dz}{dx}$ auroit deux racines égales, & l'équation $z = 0$ en auroit 3. En général si l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ a un facteur $(x - L)^n = 0$, qui indique un nombre n de racines $= L$, l'équation $z = 0$ aura un nombre $n + 1$ de racines $= L$, pourvu que $x = L$ rende $z = 0$.

153. THÉORÊME. *Si les quantités a, b, c, e sont supposées les racines toutes inégales d'une équation composée de facteurs selon la forme* $(x - a)^m . (x - b)^n . (x - c)^r . (x - e)^t = 0 = z$, *on suppose que m, n, r, t sont des nombres entiers positifs, je dis qu'en divisant cette équation par* $(x - a)^{m-1} . (x - b)^{n-1} . (x - c)^{r-1} . (x - e)^{t-1}$, *le diviseur & le quotient* $(x - a) . (x - b) . (x - c) . (x - e)$ *seront rationels, quand même a, b, c, e seroient irrationels ou imaginaires, on suppose que l'équation donnée ne contient aucun radical.* Il est visible que l'équation donnée est le produit du diviseur & du quotient dont on vient de parler; donc si l'un des deux est rationel, l'autre le sera aussi, autrement leur produit ne sauroit être rationel. Si l'on suppose le premier membre de l'équation donnée $= z$, l'on aura

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} = {} & m . (x - a)^{m-1} . (x - b)^n . (x - c)^r . (x - e)^t \\ & + n . (x - a)^m . (x - b)^{n-1} . (x - c)^r . (x - e)^t \\ & + r . (x - a)^m . (x - b)^n . (x - c)^{r-1} . (x - e)^t \\ & + t . (x - a)^m . (x - b)^n . (x - c)^r . (x - e)^{t-1} .\end{aligned} \quad [*]$$

[*] Cette équation est évidente, en différenciant & faisant varier seulement le facteur $(x - a)^m$, ensuite le facteur $(x - b)^n$, & ainsi de suite.

Si l'on ſuppoſe $\frac{dz}{dx} = 0$, il eſt viſible que cette équation & la propoſée auront $(x-a)^{m-1} \times (x-b)^{n-1} . (x-c)^{r-1} . (x-e)^{t-1}$ pour diviſeur commun, j'appellerai (R) ce diviſeur. En effet l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ eſt compoſée de ce diviſeur & de

$$m.(x-b).(x-c).(x-e)$$
$$+ n.(x-a).(x-c).(x-e)$$
$$+ r.(x-a).(x-b).(x-e)$$
$$+ t.(x-a).(x-b).(x-c).$$

Il n'eſt pas moins évident que le même diviſeur R commun aux deux équations eſt le diviſeur le plus compoſé (*). Or en faiſant attention à la méthode que nous avons donnée dans notre Algébre pour trouver le plus grand diviſeur commun, il eſt évident que ſi deux quantités rationelles ont un diviſeur commun, ce diviſeur doit être rationel; donc puiſque l'équation $z = 0$ & l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ ſont toutes les deux rationelles; car la différentielle d'une quantité rationelle ne peut être irrationelle, le diviſeur propoſé ſera rationel.

COROLLAIRE. Si l'on déſigne par A le produit de tous les facteurs ſimples qui diviſent l'équation un nombre m de fois, par B le produit de tous

(*) On l'appelle ordinairement le plus grand diviſeur commun. Ainſi x^2 ſera le diviſeur commun le plus compoſé des quantités $a x^2$, $b x^3$. Mais ſi $x = \frac{1}{2}$, x^2 ſera $= \frac{1}{4}$, & x ſera le plus grand diviſeur commun, & x^2 le diviſeur le plus compoſé. Pluſieurs confondent enſemble le diviſeur commun le plus compoſé avec le plus grand commun diviſeur.

les facteurs simples qui la divisent un nombre n de fois, par C le produit des facteurs simples qui la divisent un nombre r de fois & par D le produit des facteurs simples qui la divisent un nombre t de fois, l'on aura $A^m . B^n . C^r . D^t = 0$; donc cette équation sera divisible par $A^{m-1} . B^{n-1} . C^{r-1} . D^{t-1}$, & ce diviseur sera rationel, aussi bien que le quotient. Si $t = 1$, l'on aura $D^{t-1} = D^0 = 1$, & le diviseur sera $A^{m-1} . B^{n-1} . C^{r-1}$.

REMARQUE. On peut toujours disposer les choses de maniere que les exposans m, n, r, t aillent en décroissant, de sorte que l'on ait $m > n$, $n > r$, $r > t$.

154. THÉORÊME. *Si A, B, C, D ayant les mêmes significations que dans le corollaire précédent, l'on a l'équation* $A^m . B^n . C^r . D^t = 0$, *chaque facteur A, B, C, D sera rationel. On suppose ici que les exposans m, n, r, t vont en diminuant, de maniere que t est le plus petit.* Comme $A^m . B^n . C^r . D^t$ est divisible par le diviseur rationel $A^{m-1} . B^{n-1} \times C^{r-1} . D^{t-1}$, de même ce diviseur est divisible par le diviseur rationel $A^{m-2} . B^{n-2} . C^{r-2} . D^{t-2}$ & celui-ci par $A^{m-3} . B^{m-3} . C^{r-3} . D^{t-3}$, & ainsi de suite jusqu'à ce que l'exposant de D soit $= 1$, & alors l'on aura une quantité de cette forme $A^f . B^g . C^h . D$ qui sera divisible par $A^{f-1} . B^{g-1} . C^{h-1}$, & celle ci par $A^{f-2} . B^{g-2} . C^{h-2}$, & (en diminuant toujours les exposans) par une quantité de cette forme $A^i . B^k . C$, qui est divisible par $A^{i-1} B^{k-1}$, & celle-ci par $A^{i-2} . B^{k-2}$, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve pour diviseur une quantité de cette forme $A^s B$, qui est divisible par A^{s-1}, & celle-ci par A^{s-2}, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive au diviseur A. Donc puis-

qu'en diviſant ou en multipliant des quantités rationelles par des quantités rationelles, les réſultats ſont toujours rationels, A ſera rationel, auſſi bien que $A^5 B$; donc B ſera rationel, auſſi bien que $A^4 . B^4 . C$; donc C ſera rationel, auſſi bien que $A^3 . B^3 . C^2 . D$; donc D ſera rationel; donc &c.

155. REMARQUE. A, B, C, D déſignant les mêmes choſes que dans le théorême, ſi l'on a l'équation $A^3 . B^4 . C^2 . D = z = 0$.

P	Q	R	S
I	$A^5 B^4 C^2 D$	ABCD	D
II	$A^4 B^3 C$	ABC	C
III	$A^3 B^2$	AB	I
IV	$A^2 B$	AB	B
V	A	A	A
VI	1		

Les équations $\frac{dz}{dx} = 0$ & $z = 0$ auront pour diviſeur commun le plus compoſé $A^4 B^3 C$, comme il ſuit de ce qu'on a dit ci-deſſus (153), & ſuppoſant $A^4 B^3 C = 0 = z$ & différenciant, l'on trouvera une autre équation $\frac{dz}{dx} = 0$, qui aura avec la précédente pour diviſeur commun le plus compoſé, l'équation $A^3 B^2$, & en continuant de différencier & de prendre le diviſeur commun le plus compoſé, on trouvera les diviſeurs que repréſente la colonne Q. Si l'on diviſe l'équation propoſée par le diviſeur qui eſt au-deſſous, & celui-ci par celui qui le ſuit, & ainſi de ſuite, & qu'on écrive les quotiens vis-à-vis les quantités diviſées, l'on aura la colonne R. Si l'on diviſe cha-

cun des quotiens de cette colonne par celui qui le ſuit, l'on aura la colonne S : on a ajouté 1 aux colonnes Q & R. Cela poſé, il eſt évident que les équations qui ſont ſous S (*) contiennent les équations qui ſont contenues une fois ſeulement, ou deux fois ſeulement, ou trois fois ſeulement, &c. dans la propoſée. Les équations contenues une fois ſeulement ſont déſignées par D, qui répond au n°. I de la colonne P; C, qui répond au n°. II de la colonne P, indique les équations qui ſont contenues deux fois ſeulement dans la propoſée; B indique les équations contenues quatre fois ſeulement dans la propoſée; & A, qui répond au n°. VI de la colonne P, indique les équations contenues cinq fois dans la propoſée.

156. PROBLÊME. *Etant donnée une équation rationelle qui contienne quelques racines une fois ſeulement, d'autres deux fois ſeulement, d'autres trois fois ſeulement, &c. trouver d'autres équations rationelles dont la premiere contienne ſeulement les racines qui ſe trouvent une fois dans l'équation donnée, la ſeconde celles qui y ſont contenues deux fois ſeulement, la troiſiéme celles qui y ſont contenues trois fois ſeulement, & ainſi de ſuite, & cela que les racines ſoient rationelles, irrationelles ou imaginaires* (**). Soit l'équation $A^m B^n C^r D^t = o$, A, B, C, D ayant la même ſignification que ci-deſſus, qu'on faſſe $A^m B^n C^r D^t = z$; ſelon ce qu'on a dit

(*) D eſt regardé comme une équation; car c'eſt un facteur de l'équation propoſée; donc on a $D = o$; il en eſt de même des autres lettres de la colonne S.

(**) S'il y a des racines imaginaires, elles doivent être en nombre pair; nous ſuppoſons que l'équation propoſée eſt rationelle.

ci-dessus (153), en faisant $\frac{dz}{dx} = 0 = p$, les équations z & p auront pour diviseur le plus composé $A^{m-1} B^{n-1} C^{r-1} D^{t-1}$, qu'on trouvera par la méthode que nous avons enseignée dans l'Algébre. Si l'on fait maintenant $A^{m-1} B^{n-1} C^{r-1} D^{t-1} = z$, l'on aura, en différenciant $\frac{dz}{dx} = p$, ou $dz = p\,dx$ (car A, B, C, D sont des fonctions de x) & le diviseur le plus composé des quantités que nous venons d'appeller z, & p sera $A^{m-2} B^{n-2} C^{r-2} D^{t-2}$, & en continuant de même, parce qu'on suppose que les exposans m, n, r, t vont en diminuant, on parviendra à $D^{t-t} = D^0 = 1$, à C^0, à B^0, de maniere qu'à la fin on aura $A^r = A$, ainsi que ci-dessus (155). Pour faire l'application de ce quon vient de dire, nous résoudrons le problême suivant.

EXEMPLE. *Etant donnée l'équation* $x^8 - 2x^7 - 16x^6 - 6x^5 + 47x^4 + 48x^3 - 28x^2 - 56x - 20 = 0$, *on demande des équations plus simples dont l'une contienne seulement celles qui sont contenues une seule fois dans la proposée, la seconde celles qui sont contenues deux fois seulement, & ainsi de suite, en supposant que la proposée contient effectivement des équations multiples.* Supposant l'équation donnée $= z$, l'on différenciera & l'on aura, en supposant le multiplicateur de $dx = p$, l'on aura, dis-je, $\frac{dz}{dx} = p = 8x^7 - 14x^6 - 96x^5 - 30x^4 + 188x^3 + 144x^2 - 56x - 56 = 0$. Si l'on cherche le diviseur commun le plus composé (*) des équations z & p, on trouvera $x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$. Supposant maintenant ce di-

(*) On le trouve en s'y prenant comme pour le plus grand diviseur commun.

viſeur $= \zeta$, prenant les différentielles & faiſant $\frac{d\zeta}{dx} = p$, l'on a $p = 4x^3 + 6x^2 - 2x - 4 = 0$. Ces dernieres équations ζ & p ont pour diviſeur commun le plus compoſé $x + 1$; faiſant $x + 1 = \zeta$, l'on aura $d\zeta = dx = 1.dx$, & $\frac{d\zeta}{dx} = 1 = p$, qui n'a aucun diviſeur commun avec $x + 1$, excepté l'unité. Si l'on écrit ces équations par ordre au milieu de la colonne Q (155), l'on aura cette ſuite d'équations

I $x^8 - 2x^7 - 16x^6 - 6x^5 + 47x^4 + 48x^3 - 28x^2 - 56x - 20 = 0$
II $x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 \ldots\ldots\ldots = 0$
III $x + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$
IV. 1 . . . . . .

Si on diviſe chaque équation par celle qui la ſuit & la troiſiéme par 1, l'on aura, en ajoutant 1 pour répondre au n°. IV, l'on aura, dis-je, des équations qui répondent à la colonne R (155)

I $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 8x + 10 \ldots\ldots = 0$
II $x^3 + x^2 - 2x - 2 \ldots\ldots\ldots = 0$
III $x + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$
IV. 1 . . . . . .

Continuant à diviſer ces quantités par celles qui les ſuivent, l'on aura des quantités qui répondent à la colonne S (155)

P	
I $x - 5 = 0$	La premiere de ces équations donne $x = 5$, & renferme une
II $x^2 - 2 = 0$	racine qui eſt contenue une ſeule
III $x + 1 = 0$	fois dans la propoſée, comme il

eſt indiqué par le n°. correſpondant de la colonne P. L'équation $x^2 - 2 = 0$ donne $x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$, c'eſt-à-dire, contient deux racines $+\sqrt{2}$ & $-\sqrt{2}$, dont chacune eſt contenue deux fois dans la propoſée, comme l'indique le n°. correſpondant de

la colonne P. La troiſiéme $x + 1 = 0$ renferme une racine $= -1$, qui eſt contenue trois fois dans la propoſée, ainſi que l'indique le n°. correſpondant de la colonne P, & ce ſont là toutes les racines de l'équation propoſée.

REMARQUE. Nous avons vu ci-deſſus (84), que y étant ſuppoſé une fonction de x, lorſque x devient $x + m\,dx = x + f$, la fonction y devient $= y + \frac{f\,dy}{dx} + \frac{f^2\,ddy}{1.2.dx^2} + \frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3}$ + &c. & qu'à $x - f$ répond $y - \frac{f\,dy}{dx} + \frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2} - \frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3}$ + &c. Si on ſuppoſe que f ſoit $= x$, de maniere que x devienne $x - x$, alors la derniere formule devient $= y - \frac{x\,dy}{dx} + \frac{x\,x\,ddy}{2.dx^2}$ &c. Par la même raiſon en faiſant dy conſtant, x fonction de y deviendra $x - \frac{y\,dx}{dy} + \frac{y^2\,ddx}{2.dy^2}$ &c. lorſque y deviendra $y - y$.

157. PROBLÊME. *Trouver les racines approchées d'une équation.* Soit l'équation $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + g = 0$, ſi l'on ſubſtitue dans cette équation au lieu de x une quantité plus grande ou plus petite qu'une des racines, le réſultat ne ſera pas $= 0$; de ſorte qu'on aura $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + g = y$. Si on ſubſtitue au lieu de x une des racines approchées que j'appelle p, nous aurons, en conſidérant la quantité x comme une fonction de y, ce qui eſt très-permis, puiſque y eſt une fonction de x, nous aurons, dis-je, dans ce cas, $p = x - \frac{y\,dx}{dy} + \frac{y^2\,d^2x}{2\,dy^2} - \frac{y^3\,d^3x}{2.3\,dy^3}$ + &c. Car alors y devient à peu près

$= y - y = 0$; & si p étoit une racine exacte de l'équation, y seroit $= 0$, & alors la fonction x de y deviendroit exactement $x - \frac{y\,dx}{dy} + \frac{y\,y\,ddx}{2.dy^2} - \frac{y^3\,d^3x}{2.3.dy^3} + \frac{y^4\,d^4x}{2.3.4\,dy^4}$ &c. on suppose ici dy constant.

Soit $\frac{dx}{dy} = q$, $\frac{dq}{dy} = r$, $\frac{dr}{dy} = t$, &c. on aura $p = x - yq + \frac{y^2r}{2} - \frac{ty^3}{2.3}$ &c.

Pour faire mieux comprendre l'usage de cette méthode. Soit l'équation $x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = y$, dont une des racines approchées est $= 5$. Mais en substituant cette valeur de x, l'on trouve $y = 75$, & en différenciant l'on a $dy = 3x^2\,dx - 20x\,dx - 130\,dx$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 - 20x - 130} = q$, $\frac{ddx}{dy} = \frac{20\,dx - 6x\,dx}{(3x^2 - 20x - 130)^2}$, & $\frac{dq}{dy} = \frac{ddx}{dy^2} = \frac{20 - 6x}{(3x^2 - 20x - 130)^3} = r$; & par conséquent $dr = \frac{3.(20 - 6x)^2\,dx}{(3x^2 - 20x - 130)^4} - \frac{6\,dx}{(3x^2 - 2x - 134)^3}$, & $\frac{dr}{dy} = \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3.(20 - 6x)^2}{(3x^2 - 20x - 130)^5} - \frac{6\,dx}{(3xx - 2x - 130)^4} = t$. Substituant 5 au lieu de x dans les valeurs de q, r, t, &c, on aura $q = -\frac{1}{155}$, $r = \frac{10}{3723875}$, $t =$ &c. & $p = x - yq + \frac{y^2r}{2} = 5.4915$, à peu de chose près.

De quelques usages du Calcul différentiel dans les series.

158. PROBLÊME. *élever une serie à une puissance m.* Soit la serie $M=(a+bx+cx^2+d'x^3+ex^4+\&c.)$ (*) qu'on veut élever à la puissance m, je fais M^m égale à la serie $N=(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.)$, & j'ai $M^m=N$. Cette équation a lieu, quelle que soit la valeur de x; donc en supposant $x=0$, l'on aura $a^m=A$. En différenciant, il vient $m.M^{m-1}\times dM=m\,dx.(b+2cx+3d'x^2+4ex^3+\&c.)M^{m-1}=dx.(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\&c.)$. Divisant le premier membre de la derniere équation par $M^m\,dx$, & le second par $N\,dx=M^m\,dx$, vous trouverez $\frac{m.(b+2cx+3d'x^2+4ex^3+\&c.)}{a+bx+cx^2+d'x^3+ex^4+\&c.}=\frac{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\&c.}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.}$. Si l'on multiplie le premier membre de cette équation par le diviseur du second & réciproquement, il vient

$$\left.\begin{array}{r}
bA+bBx+bCx^2+bDx^3+bEx^4\,\&c.\\
+2cAx+2cBx^2+2cCx^3+2cDx^4\,\&c.\\
+3d'Ax^2+3d'Bx^3+3d'Cx^4\,\&c.\\
+4eAx^3+4eBx^4\,\&c.\\
+5fAx^4\,\&c.
\end{array}\right\}=$$

$$\left.\begin{array}{r}
aB+bBx+cBx^2+d'Bx^3+eBx^4\,\&c.\\
+2aCx+2bCx^2+2cCx^3+2d'Cx^4\,\&c.\\
+3aDx^2+3bDx^3+3cDx^4\,\&c.\\
+4aEx^3+4bEx^4\,\&c.\\
+5aFx^4\,\&c.
\end{array}\right\}$$

(*) On met d' pour ne pas confondre un coefficient avec la marque de la différentielle.

La loi de cette équation eſt ſi évidente, tant pour les colonnes horiſontales, que pour les verticales, qu'il eſt inutile de l'expliquer.

Nous venons de voir que $A = a^m$. Pour déterminer les autres coefficiens, on fera attention que l'équation qu'on vient de trouver ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs de x, à moins que le multiplicateur d'une puiſſance de x dans un des membres ne ſoit égal au multiplicateur de la même puiſſance priſe dans l'autre membre. De plus en ſuppoſant $x = 0$, l'on a $bA.\ m = aB$; donc $B = \frac{m.bA}{a} = \frac{mba^m}{a}$ (à cauſe de $A = a^m$) $= mba^{m-1}$. En conſidérant tous les termes qui multiplient une même puiſſance de x dans chaque membre de l'équation comme un ſeul terme, & comparant chaque terme d'un membre avec le terme correſpondant de l'autre membre, l'on aura autant d'équations qu'il y a de lettres B, C, D, &c. & ces équations ſerviroient à déterminer les coefficiens B, C, D, &c. L'équation $mbA = aB$ donne $B = \frac{mbA}{a}$, l'équation $mbB + 2cA = bB + 2aC$ donne $C = \frac{(m-1).bB + 2mcA}{2a}$; on trouvera facilement les valeurs de D, E, &c.

159. Si l'on avoit la ſerie $xa + bx^2 + cx^3 +$ &c. on diviſeroit tous les termes par x, & l'on auroit $a + bx + cx^2$ &c. qu'on pourroit élever à la puiſſance m, comme on vient de l'expliquer: mais on multiplieroit le réſultat $A + Bx + Cx^2$ &c. par x^m. Si l'on avoit le polinome $a + cx^2 + ex^4 + x^5$, on éleveroit la ſerie $a + bx + cx^2$ &c. à la puiſſance m, & l'on feroit dans le réſultat

$b = 0$, $d' = 0$, $f = 1$, $h = 0$ &c. si l'on vouloit élever la serie $a z^{\frac{1}{2}} + b z + c z^{\frac{3}{2}} + d' z^2$ &c. à la puissance m on feroit $z^{\frac{1}{2}} = x$, on substitueroit x au lieu de $z^{\frac{1}{2}}$, & divisant tous les termes par x, l'on auroit $a + bx + cx^2$ &c. qu'on éleveroit à la puissance m, en se souvenant de multiplier le résultat par $x^m = z^{\frac{m}{2}}$. en faisant successivement $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. on aura la racine quarrée, la racine cubique, &c. de la serie M.

160. Tandis que nous sommes sur cette matiere, il ne sera pas inutile de faire remarquer la loi que suivent les termes du produit d'une serie $M = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ &c.) par la serie $N = (a + bx + cx^2 + d'x^3 + cx^4$ &c.). En faisant la multiplication à l'ordinaire, il vient.

la serie P

$$\begin{aligned} &aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 \text{ &c.} \\ &+ bAx + bBx^2 + bCx^3 + bDx^4 \text{ &c.} \\ &+ cAx^2 + cBx^3 + cDx^4 \text{ &c.} \\ &+ d'Ax^3 + d'Bx^4 \text{ &c.} \\ &+ eAx^4 \text{ &c.} \\ &\text{&c.} \end{aligned}$$

On doit examiner avec attention la loi des coefficiens de chaque terme en considérant toutes les quantités où se trouve une même puissance de x comme un seul terme.

Le premier terme de la serie P est le produit des deux premiers termes des series M & N. Mais on trouve le coefficient du second terme, en multipliant le premier terme de la serie N par le coefficient du second terme de la serie M, & le coefficient du second terme de la serie N par le premier terme de la serie M, & ajoutant les produits. Le troisiéme terme de la serie P se trouve

en multipliant le premier coefficient de N par le troiſiéme de M, le ſecond par le ſecond, & le troiſiéme par le premier; & en général pour avoir le coefficient d'un terme quelconque de la ſerie P, par exemple le ſixiéme, on prendra ſix termes dans chacune des ſeries M & N, ſi c'étoit le ſeptiéme, on en prendroit ſept, & ainſi de ſuite; on multipliera le premier de la premiere par le dernier de l'autre, le ſecond de M par le pénultiéme de N, le troiſiéme de M par l'antépénultiéme de N, & ainſi de ſuite.

161. Comme l'on peut ſouvent avoir beſoin de réduire une fraction en ſerie, nous allons parler de cette opération.

Soit la fraction $\frac{a}{b+mx}$, je fais $\frac{a}{b+mx} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. Multipliant tout par $b+mx$, il vient $a = bA + bBx + bCx^2 + bDx^3$ &c. $+ mAx + mBx^2 + mCx^3$ &c.

Faiſant la comparaiſon des termes en égalant bA à a, l'on aura $A = \frac{a}{b}$, & égalant les autres termes à 0, l'on aura $bB + mA = 0$, $B = \frac{-mA}{b}$, $C = -\frac{mB}{b}$, $D = \frac{-mC}{b}$, &c.

En conſidérant ces coefficiens avec attention, on verra qu'ils forment une ſerie récurrente du premier ordre, dans laquelle chaque terme eſt déterminé par le précédent multiplié par $\frac{-m}{b}$, & l'on aura $\frac{a}{b+mx} = \frac{a}{b} - \frac{mAx}{b} - \frac{mBx^2}{b}$

&c. On doit faire uſage de cette ſerie, ſi $x < \frac{b}{m}$; Mais ſi $x > \frac{b}{m}$, on formera la ſerie de cette maniere $\frac{a}{mx+b} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} +$ &c. qui étant traitée par la même méthode, donnera $\frac{a}{mx+b} = \frac{a}{mx} - \frac{bA}{mx^2} - \frac{bB}{mx^3}$ &c. dans laquelle les lettres A, B, C &c. déſignent le coefficient du terme antécédent. Par exemple B déſigne dans cette ſerie le coefficient $-\frac{bA}{m}$; mais dans la premiere ſerie trouvée, B déſigne $-\frac{mA}{b}$.

Si l'on avoit la fraction $\frac{a+mx}{b+cx+nx^2}$, l'on feroit $\frac{a+mx}{b+cx+nx^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. d'où l'on tire

$$\begin{aligned} a+mx = {} & bA + bBx + bCx^2 + bDx^3 \text{ &c.} \\ & + cAx + cBx^2 + cCx^3 \text{ &c.} \\ & + nAx^2 + nBx^3 \text{ &c.} \end{aligned}$$

En faiſant le premier terme $= a$, l'on trouve $A = \frac{a}{b}$, en faiſant le ſecond $= mx$, l'on trouve $B = \frac{m - cA}{b}$. Faiſant chacun des autres termes $= 0$, l'on a $C = \frac{-cB - nA}{b}$, $D = \frac{-cC - nB}{b}$ &c. Ces coefficiens forment une ſerie récurrente du ſecond ordre dans laquelle chaque terme eſt donné par deux termes antécédens, en multipliant le

le plus proche de celui que l'on cherche par $\frac{-c}{b}$ & le plus éloigné par $-\frac{n}{b}$. Les premieres lettres A, B, C, &c. dans ces termes désignent le coefficient du terme antécédent, les secondes A, B, C, &c. désignent le coefficient de celui qui précede l'antécédent; ainsi dans la valeur de D, C désigne le coefficient du terme antécédent, & B celui du terme qui précede l'antécédent. Si l'on vouloit former une serie dans laquelle x se trouvât au diviseur, l'on feroit $\frac{mx+a}{nx^2+cx+b} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}$ + &c. qui étant traitée de même, donnera des coefficiens qui formeront une serie récurrente du second ordre. De même si le dénominateur de la fraction est du troisiéme degré, la serie sera récurrente du troisiéme ordre, & ainsi de suite.

Nous avons enseigné dans la premiere Partie de cet Ouvrage, à trouver le terme général & le terme sommatoire des series récurrentes; ainsi il seroit inutile d'en parler ici.

162. On doit remarquer que pour qu'une fraction produise une serie récurrente, il est nécessaire que l'exposant de x dans le dénominateur soit plus grand que celui de x dans le numérateur. Par exemple en supposant $\frac{a^3+x^3}{a-x} = A + Bx +$ $Cx^2 + Dx^3$ &c. on trouvera l'équation $a^3 + x^3 =$ $aA + aBx + aCx^2 + aDx^3$ &c.
$-Ax - Bx^2 - Cx^3$ &c.

En faisant la comparaison, l'on trouve $a^3 = aA$,

ou $A = a^2$, $B = \frac{A}{a}$, $C = \frac{B}{a}$. Juſques-là la loi eſt conſervée ; mais le terme ſuivant donne $x^3 = aDx^3 - Cx^3$; ou $1 = aD - C$, ou $D = \frac{1+C}{a}$. Après ce terme, la ſerie ne ſera plus interrompue.

Pour éviter cet inconvénient, on diviſera le numérateur par le dénominateur juſqu'à ce qu'on trouve une fraction dans laquelle l'expoſant de x dans le dénominateur ſoit plus grand que dans le numérateur. Dans l'exemple propoſé, en diviſant $x^3 + a^3$ par $-x + a$, l'on aura $x^2 - ax - aa + \frac{2a^3}{a-x}$; ainſi la fraction propoſée ſera égale à $x^2 - ax - aa$ plus la ſerie récurrente que donnera la fraction $\frac{2a^3}{a-x}$.

163. Si l'on avoit la fraction $\frac{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}}{a - a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + x^1}$, on pourroit réduire les expoſans $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ & 1 de x au même dénominateur, en cherchant la progreſſion arithmétique dans laquelle ils ſont renfermés, & l'on auroit, en faiſant attention que $a = ax^0$, l'on auroit, dis-je, $0 = \frac{0}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ & $1 = \frac{6}{6}$; ces expoſans ſont renfermés dans la progreſſion arithmétique $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}$, &c. dont les termes doivent être les expoſans de x dans la ſerie cherchée, qui ſera $= A + Bx^{\frac{1}{6}} + Cx^{\frac{2}{6}} + Dx^{\frac{3}{6}}$ &c. & faiſant les opérations néceſſaires, l'on aura une ſerie récurrente du ſixiéme ordre produite

par la fraction $\frac{a^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}} - a^{\frac{3}{6}} x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{6}{6}}}$, que l'on fera

$$= \frac{a^{\frac{2}{6}} + x^{\frac{2}{6}}}{a^{\frac{6}{6}} + 0.\, x^{\frac{1}{6}} + 0.\, x^{\frac{2}{6}} - a^{\frac{3}{6}} x^{\frac{3}{6}} + 0.\, x^{\frac{4}{6}} + 0.\, x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{6}{6}}}.$$

REMARQUE. La fraction $\frac{1}{1-x}$ (en divisant le premier terme par 1 & multipliant par $1 - x$, ôtant du numérateur le produit du diviseur par le quotient, divisant le reste par $1 - x$, & ainsi de suite) devient $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ &c. Si l'on fait $x = 2$, l'on aura $\frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$, & $1 + x + x^2$ &c. $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16$ &c. Comment accorder cela? Après la premiere division, l'on a $1 + \frac{x}{1-x}$. Après la seconde division, l'on trouve $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$; donc si l'on s'arrête au second terme, l'on aura $\frac{1}{1-x} = 1 + x$: mais on négligera $\frac{x^2}{1-x} = \frac{4}{-1} = -4$; or $1 + x = 3$ & $3 - 4 = -1$; donc on sera éloigné de la valeur véritable de la fraction cherchée de la quantité $\frac{x^2}{1-x}$, & en continuant à l'infini, la serie $1 + x + xx + x^3 \ldots$, x^∞ sera éloignée de la véritable valeur cherchée de la quantité $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$; de sorte que

$\frac{1}{1-x}$ eſt la ſomme de la ſerie $1 + x + x^2 \ldots\ldots x^\infty$ en ajoutant $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$, & non autrement. Ainſi quand il s'agit d'une ſerie divergente $1 + x + x^2 + x^3$ &c. produite par l'évolution d'une fraction, on peut dire que cette fraction eſt la ſomme de la ſerie; mais alors on doit entendre par ſomme une expreſſion finie dont l'évolution a produit la ſerie. Mais ſi $x < 1$, ſi par exemple $x = \frac{1}{2}$, l'on aura $1 + x + x^2$ &c. $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ &c. $= \frac{1}{1-x} = 2$; c'eſt-à-dire, que dans ce cas la ſerie $1 + x + x^2$ &c. approche d'autant plus de la valeur cherchée que l'on prend plus de termes, & à l'infini la ſerie eſt $= 2$.

Nous ferons encore obſerver qu'il y a une infinité de ſeries qui ſont d'abord divergentes, & qui deviennent enſuite convergentes; de ſorte qu'en prenant un certain nombre de termes, on peut avoir la valeur de la ſerie auſſi approchée qu'on veut. Cela aura lieu lorſque le facteur numérique du dénominateur augmente plus après un certain nombre de termes que le numérateur de chaque terme. Soit la ſerie $A = x + \frac{5x^2}{7.} + \frac{7x^3}{7.4} + \frac{7.4x^4}{7.4.5}$ &c. Si $x = 10$, les termes iront d'abord en augmentant, parce que le multiplicateur x du numérateur augmente plus le numérateur que le dénominateur n'eſt augmenté par les facteurs 4, 5, &c. Mais au 11e terme, le facteur x étant $= 10$ & le facteur qui augmente le dénominateur étant $= 11$, ce terme ſera plus petit que le 10e & le 12e encore plus petit que le 11e, & ainſi de ſuite; donc on pourra,

en prenant un certain nombre de termes, avoir la valeur approchée de la ſerie A lorſque $x = 10$; & il eſt viſible que ce ſera la même choſe pour une autre valeur finie de x.

164. PROBLÈME. *Etant donnée la ſomme y de la ſerie* $A + Px + Qx^2 + Rx^3 +$ &c. *dont on multiplie les termes par les conſtantes* $a, b, c,$ &c. *on demande la ſomme* M *de la ſerie réſultante* $aA + bPx + cQx^2$ &c. Quoiqu'on ne connoiſſe aucune méthode pour réſoudre ce problême dans toute ſa généralité, nous pouvons cependant en trouver la ſolution dans certains cas. Si, par exemple, les coefficiens $a, b, c, e, f,$ &c. forment la ſerie des nombres figurés, on prendra les premieres, ſecondes, &c. différences juſqu'aux dernieres qui s'évanouiſſent. Les premieres différences ſeront $b - a, c - b, e - c, f - e$, &c. les ſecondes ſont $c - 2b + a, e - 2c + b, f - 2e + c$, &c. les troiſiémes ſont $e - 3c + 3b - a, f - 3e + 3c - b$, &c. & ainſi de ſuite. Si on fait $b - a = B$, $c - 2b + a = C$, $e - 3c + 3b - a = D$, $f - 4e + 4c - 4b + a = E$, &c. je dis que la ſomme M ſera $= ay + \frac{Bxdy}{dx} + \frac{Cx^2ddy}{dx^2} + \frac{Dx^3d^3y}{dx^3} + \frac{Ex^4d^4y}{dx^4} +$ &c, dx étant conſtant.

En effet on aura les équations ſuivantes:

$$y = A + Px + Qx^2 + Rx^3 + Tx^4 +$$ &c.
$$dy = P\,dx + 2Qx\,dx + 3Rx^2\,dx + 4Tx^3\,dx +$$ &c.
$$ddy = 2Q\,dx^2 + 6Rx\,dx^2 + 12Tx^2\,dx^2 +$$ &c.
$$d^3y = 6R\,dx^3 + 24Tx\,dx^3 +$$ &c.
$$d^4y = 24T\,dx^4 +$$ &c.

d'où l'on tire

$$ay = Aa + aPx + aQx^2 + aRx^3 + aTx^4$$ &c.
$$\frac{Bxdy}{dx} = BPx + 2BQx^2 + 3BRx^3 + 4BTx^4$$ &c.
$$\frac{Cx^2d^2y}{2dx^2} = CQx^2 + 3CRx^3 + 6CTx^4$$ &c.
$$\frac{Dx^3d^3y}{6dx^3} = DRx^3 + 4DTx^4$$ &c.
$$\frac{Ex^4d^4y}{24.dx^4} = ETx^4$$ &c.

Si $M = A z + P b x + Q c x^2 + R e x^3 + T f x^4$ &c. comme on le ſuppoſe, on doit avoir, en comparant les termes $aP + BP = Pb$, ou $B = b - a$. Mais $a + 2B + C = c$, ou $C = c + a - 2b$. On trouvera de même $D = e - 3c + 3b - a$, &c. qui ſont les valeurs qu'on a d'abord ſuppoſées aux lettres B, C, D, donc on a eu raiſon de ſuppoſer $M = ay + \frac{B x dy}{dx} + \frac{C x^2 d^2 y}{2 dx^2} +$ &c.

Si les quantités a, b, c, e, f ſont en progreſſion arithmétique, les ſecondes différences étant nulles, l'on aura $C = o$, $D = o$ &c. & $M = ay + \frac{B x dy}{dx}$. Si les ſecondes différences ſont conſtantes, l'on aura $D = o$, & $M = ay + \frac{B x dy}{dx} + \frac{C x^2 ddy}{2 dx^2}$.

Soit la ſerie $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 +$ &c. $= \frac{1}{1-x}$; de ſorte que l'on a $A = P = R = 1$. Qu'on multiplie les termes de cette ſerie par les termes de la progreſſion arithmétique 3. 5. 7. 9. 11. &c. on demande la ſomme de la ſerie $3 + 5x + 7x^2 + 9x^3 + 11x^4$ &c. Dans ce cas $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$, $b - a = B = 2$; mais $C = D = o$. La ſomme de la ſerie propoſée ſera, en ſuppoſant $x > 1$, $\frac{1}{1-x} = y$; donc $dy = \frac{dx}{(1-x)^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$ & $M = ay + \frac{B x dy}{dx} = \frac{3}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2}$.

Recherches métaphyſiques ſur la nature du calcul différentiel.

165. Les anciens Géomètres faiſoient uſage des raiſons des quantités dont la différence devenoit plus petite qu'aucune quantité donnée. Pour donner une idée du chemin qu'ils pouvoient ſuivre dans la détermination des ſous-tangentes des courbes, ſoit propoſé

de mener une tangente MT (fig. 137) au point M d'une courbe donnée, que nous ſuppoſerons une parabole. Si l'on tire la tangente TMG & la ſecante MIS, il eſt viſible que l'angle CMS deviendra d'autant plus petit, que l'arc MI ſera plus petit, & qu'en ſuppoſant cet arc plus petit qu'aucune quantité donnée, l'angle ſera plus petit qu'aucune quantité donnée. En effet en concevant cet arc comme un arc circulaire, il eſt évident que l'angle CMI formé par la tangente & une corde a pour meſure la moitié de cet arc; donc cet angle eſt inaſſignable lorſque l'arc eſt inaſſignable ou plus petit qu'aucune quantité donnée; donc les lignes CI & LS deviendront plus petites qu'aucune quantité donnée. Cela poſé, en ſuppoſant MH parallèle à l'axe AP, il eſt évident que les triangles PTM, LMH ſont ſemblables, & que la raiſon MP: PT eſt égale à la raiſon LH: MH. Or cette derniere raiſon devient à la fin égale à celle de SH: MH & à celle de IN: MN; donc la raiſon de la différentielle IN de l'ordonnée à la différentielle MN de l'abſciſſe, devient à la fin égale à la raiſon de l'ordonnée à la ſous-tangente; & c'eſt là la limite qu'elle ne peut paſſer, & de laquelle elle approche d'autant plus que IN eſt plus petite. Donc en déterminant à quelle raiſon devient à la fin égale à la raiſon de la différence de l'ordonnée, à la différence de l'abſciſſe, on déterminera la ſous-tangente, & par conſéquent la tangente.

Soit $2ax = y^2$ l'équation de la parabole, $2a$ étant le paramêtre, ſi l'on augmente l'abſciſſe AP $= x$ de la quantité $Pp = MN = dx$ & l'ordonnée MP $= y$ de la quantité IN $= dy$, en ſubſtituant $x + dx$ au lieu de x & $y + dy$ à la place de y,

l'on aura $2ax + 2adx = y^2 + 2ydy + dy^2$. Retranchant de cette équation celle de la courbe, il vient $2adx = 2ydy + dy^2$, d'où l'on tire $dy : dx :: 2a : 2y + dy$. Mais lorsque dy devient plus petit qu'aucune quantité donnée, la raison $2a : 2y + dy$ devient à la fin égale à la raison $2a : 2y$; donc à la fin l'on a $dy : dx :: 2a : 2y$. Mais à la fin la raison de $dy : dx$ est égale à la raison de l'ordonnée à la sous-tangente PT; donc $2a : 2y :: y : PT = \frac{2yy}{2a} = \frac{4ax}{2a} = 2x$, comme on l'a trouvé dans les sections coniques.

166. Nous avons trouvé ci-dessus la tangente de la parabole en faisant la différentielle de $y^2 = 2ydy$, & en négligeant dy^2, ce qu'on peut faire toutes les fois que y est fini; car alors dy^2 n'entre point dans la proportion de la limite (pourvu que la quantité affectée de dy ne soit pas $= 0$; car dans ce cas dy^2 serviroit à trouver la proportion de la limite). On peut voir par là qu'il n'y a point d'erreur à craindre en suivant notre méthode. Mais pour développer notre idée de maniere à ne laisser aucun doute, il faut faire voir 1°. qu'il y a des raisons qui approchent tellement de l'égalité, que la différence devient à la fin, c'est-à-dire, dans la limite, plus petite qu'aucune quantité donnée. Cela est évident pour les quantités dont l'une peut être augmentée & l'autre diminuée comme l'on voudra, comme il arrive aux abscisses AP, Ap; car en diminuant Ap, on peut faire tomber le point p sur P, & alors AP est $=$ Ap. Il y a des quantités qui approchent de l'égalité, en suivant une certaine loi, qui sont dans le même cas, par exemple la valeur de la serie $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$, &c. approche

d'autant plus de l'unité, qu'on prend un plus grand nombre de termes. Ainſi en prenant les deux premiers termes, il s'en faudra de $\frac{1}{4}$; en prenant les trois premiers, il s'en faudra de $\frac{1}{8}$, & la ſomme entiere de la ſerie ſuppoſée continuée à l'infini, ſera $= 1$, comme on l'a démontré dans la premiere Partie de cet Ouvrage, & comme cela eſt évident. Car ſi l'on partage une ligne d'un pied en deux parties égales, qu'on prenne d'abord une de ſes moitiés, enſuite la moitié de l'autre moitié, enſuite la moitié du reſte, & ainſi de ſuite, la ſomme de toutes ces parties donnera un pied.

Il faut démontrer en ſecond lieu que les raiſons ou les quantités qui vont toujours en s'approchant de l'égalité de maniere que leur différence devienne plus petite qu'aucune quantité donnée, deviennent à la fin égales. Suppoſons qu'à la fin leur différence ſoit D quantité donnée & déterminée; donc elles ne peuvent approcher de l'égalité plus près que de la quantité donnée D, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

167. On peut remarquer qu'on ne doit pas regarder comme égales les quantités ou les raiſons qui ont une différence, quelle qu'elle ſoit; mais ſeulement on doit conclure que deux quantités dont la différence devient plus petite qu'aucune quantité donnée, ſont à la fin égales, parce qu'à la fin cette différence devient nulle ou $= 0$: ainſi cette égalité s'obtient dans la derniere limite, de laquelle les quantités ou les raiſons s'approchent au-delà de toute meſure aſſignable, quoique peut-être dans certains cas elles ne parviennent jamais à cette derniere limite; donc dans les démonſtrations fondées ſur la méthode du calcul différentiel, on ne néglige aucune quantité grande ou petite,

mais on dit ſeulement que deux quantités ou deux raiſons ſont égales, lorſque leur différence eſt nulle.

168. Je ſais que ſouvent les quantités s'évanouiſſent dans la limite; cependant il n'eſt pas inutile de conſidérer la proportion de la limite, parce que d'autres quantités qui ne s'évanouiſſent pas, & qui auparavant avoient la même proportion, acquierent dans la limite la proportion de la limite; car (fig. 137) les raiſons IN : MN, CN : MN different, à la vérité, l'une de l'autre, de maniere cependant que la différence devient inaſſignable; donc dans la limite elles ſeront égales. Mais où eſt la limite? Au point M où les points N, I, C ſe confondent. Mais alors les lignes MN, CN, IN diſparoiſſent, cela eſt vrai; cependant les lignes MH, LH, SH proportionnelles aux premieres, continuent de reſter finies, & dans la limite les raiſons LH : MH, SH : MH ſont égales. Donc quoiqu'alors dy ſoit $= 0$ & $dx = 0$, cependant l'on a SH : MH :: MP : PT. Mais la raiſon de $dy : dx$ n'eſt pas égale à celle MP : PT tandis que dy & dx ſont quelque choſe; ſeulement la raiſon de $dy : dx$ approche extrêmement de celle de y : PT lorſque dy & dx ſont des quantités extrêmement petites; donc très-près de la limite les raiſons de $dy : dx$, $2a : 2y$, y : PT approchent extrêmement de l'égalité, & dans la limite, lorſque $dy = 0$ & $dx = 0$. les raiſons de $2a : 2y$, y : PT ſont parfaitement égales.

On peut donc dire que la raiſon de $dy : dx$ très-près de la limite fait connoître le raiſon exacte de y : PT dans la limite. Or la raiſon de $dy : dx$ très-près de la limite étant égale à la raiſon $2a : 2y + dy$, l'on a dans la limite $2a : 2y :: y$: PT, parce qu'alors

$dy = 0$, auſſi bien que dy^2. Puiſque dans la limite $dy^2 = 0$, il eſt viſible qu'en cherchant la proportion de la limite, l'on peut en différenciant négliger dy^2. Mais pourquoi ne néglige-t'on pas auſſi dy? Parce qu'alors on ne connoîtroit pas la raiſon très-approchée auprès de la limite de $2a : 2y$, que fait connoître la raiſon $dy : dx$. Ainſi les dy, les dx ſont quelque choſe, lorſqu'on les exprime, & deviennent $= 0$ à la fin du calcul; donc on peut négliger dx^2 devant dx, dx^3 devant dx^2, parce que ſi dx^2 ſe trouve dans un calcul, ſon coefficient étant fini, dx^2 ſuffira pour faire connoître la raiſon de la limite, & dx^3 devra être négligé.

169. M. Newton conſidere les différentielles comme des quantités évanouiſſantes ou naiſſantes, & c'eſt dans cet état qu'il conſidere les rapports de ces quantités: il les appelle *fluxions*. Pour déſigner la fluxion de x, les Anglois écrivent $\dot{x}$; la ſeconde fluxion ſe marque ainſi $\ddot{x}$; la troiſiéme fluxion ſe déſigne par $\dddot{x}$; &c. On met autant de points au-deſſus de la variable, qu'il eſt déſigné par l'ordre de la fluxion. Ils appellent *fluentes* ce que nous appellons intégrales: ainſi x eſt la fluente de $\dot{x}$ ou de dx. Pour revenir à M. Newton, on peut lui faire cette objection. Si les fluxions ſont des quantités évanouiſſantes, elles ne doivent point avoir d'autres fluxions, autrement une quantité évanouiſſante ſeroit compoſée d'autres quantités évanouiſſantes, ce qui paroît impoſſible: car il eſt évident qu'alors les premieres fluxions ne ſeroient pas évanouiſſantes. Mais dans nos principes rien n'empêche que des quantités dx, dy extrêmement petites très-près de la limite aient d'autres différentielles ddx,

$dddx$ &c. ddy, $ddd y$ &c. D'ailleurs une chose quelconque eſt exiſtante ou non exiſtante : il n'y a point de milieu entre exiſter & ne pas exiſter, & toute quantité paſſe de l'exiſtence à la non exiſtence dans un inſtant indiviſible. Il paroît donc bien difficile d'admettre des quantités évanouiſſantes ou des quantités conſidérées dans l'état de paſſage de l'exiſtence à la non exiſtence, comme il eſt impoſſible de conſidérer une choſe dans ſon état de paſſage du néant à l'être.

170. On peut encore faire une autre objection à M. Newton. Les fluxions ou quantités évanouiſſantes ſont quelque choſe dans cet état, c'eſt-à-dire, pendant qu'elles s'évanouiſſent, ou ſont $=0$. Dans le premier cas $IN = dy$ eſt $< NC$ (fig. 137), & la raiſon de dy à dx n'eſt pas égale à la raiſon de $CN : dx$, ou à la raiſon de $y : PT$. Dans le ſecond cas il paroît abſurde de chercher la raiſon d'un rien à un rien. Auſſi M. Newton ne veut pas qu'on conſidere les fluxions lorſqu'elles ſont évanouies, mais ſeulement lorſqu'elles s'évanouiſſent. Au reſte je ſuis rempli d'eſtime pour ce ſublime Mathématicien, auquel nous devons tant de belles découvertes.

REMARQUE. Nous avons dit ci-deſſus (165) que la raiſon de $dy : dx$ étoit à la fin égale à la raiſon de l'ordonnée à la ſous-tangente, d'où il ſuivroit qu'on auroit à la fin $dy : dx :: y : PT :: LH : MH$. Dans la limite on a $y : PT :: LH = HS$ (dans la limite) : HM, mais alors $dy = 0$ & $dx = 0$; donc jamais la raiſon de $dy : dx$ ne peut être égale à la raiſon de $y : TP$, puiſque dy & dx ne peuvent atteindre à la limite ſans ceſſer d'exiſter. Cette difficulté eſt ſans doute très-forte, mais ne paroît pas impoſſible à réſoudre. En effet quand

on prétend que la raiſon de $dy : dx$ devient à la fin égale à celle de y: PT, cela doit s'entendre de maniere que la raiſon de HS: HM, qui eſt égale très-près de la limite à celle de $dy : dx$, devient dans la limite égale à celle de HL: HM, qui eſt égale à celle de y: PT; de ſorte que ſi dy & dx exiſtoient dans la limite, la raiſon de $dy : dx$ ſeroit égale à celle de y: PT. De même quand on dit que des quantités ou des raiſons qui vont toujours en s'approchant de l'égalité de maniere que leur différence devient plus petite qu'aucune quantité donnée ſont à la fin égales, cela s'entend ſi ces quantités exiſtent dans la limite, à moins qu'on ne veuille établir une eſpéce d'égalité entre des riens; & pour les raiſons ſi les quantités qui les forment exiſtent, ou bien encore cela s'entend des quantités, qui dans la limite ne diſparoiſſent pas, & auxquelles les quantités qui dans la limite ſont $= 0$ étoient proportionnelles très-près de la limite.

Enfin ſi l'on ſe rappelle que l'on a trouvé ci-deſſus (165) $dy : dx :: 2a : 2y + dy$, ce qui a lieu auprès de la limite, on verra que dans la limite HL: HM:: $2a : 2y + 0$; car dans la limite $dy = 0$. Et ſi l'on fait LH $= dy$ & HM $= dx$, l'on aura dans la limite $dy : dx :: 2a : 2y :: y$: PT. Mais alors dy & dx ne ſont pas les différentielles de l'ordonnée & de l'abſciſſe, mais ſont des quantités HS, HM, qui hors de la limite, étoient proportionnelles aux véritables dy & dx, & qui dans la limite deviennent HL, HM (fig. 138), & ſont alors proportionelles à y & PT.

M. Euller prétend que les différentielles ſont des *purs riens*. Si cela étoit vrai, on ne pourroit les comparer enſemble; car on ne peut dire ni concevoir qu'un

rien ſoit double, triple, &c. d'un autre rien. Il faudroit même dans cette hypothèſe admettre des riens de différens ordres les uns infiniment plus grands que les autres. Mais comment concevoir qu'un rien, qui n'eſt pas une grandeur, peut être plus grand ou plus petit qu'un autre rien, qui n'a lui-même aucune grandeur? Comment comparer ce qui ne peut ni exiſter, ni être conçu & qui n'a aucune propriété (*)? Ainſi nous ne ſaurions admettre l'opinion de ce grand Mathématicien.

Le détail dans lequel nous venons d'entrer peut faire comprendre aux Commençans en quoi conſiſte l'artifice du calcul différentiel, que très-peu de Géomètres paroiſſoient avoir pénétré. A l'égard du calcul intégral, puiſqu'en différenciant y^2 l'on

(*) On dira peut-être que $6 : 3 :: 6 \times 0 : 3 \times 0 :: 0 : 0 :: 2 : 1$. Mais ſi la raiſon $0 : 0$ vaut 2, la raiſon $6 \times 0 : 3 \times 0$ ſera le produit des raiſon égales $6 : 3$ & $0 : 0$, & ſa valeur ſera 4 & non pas 2, ce qui eſt contre la ſuppoſition; & il eſt viſible que les raiſons $6 : 3$ & $6 \times 0 : 3 \times 0$ ne peuvent être ſuppoſées égales qu'autant qu'on regarde 0 comme une même quantité qui multiplie l'antécédent & le conſéquent de la raiſon $6 : 3$. On ne peut donc ſuppoſer que la raiſon $0 : 0$ ſoit égale à celle de $2 : 1$ qu'autant qu'on ſuppoſe que l'antécédent 0 (qu'on regarde alors comme une quantité infiniment petite) eſt multiplié par une quantité double de celle qui multiplie le conſéquent 0, conſidéré comme une quantité infiniment petite égale au 0 qui ſe trouve à l'antécédent. On ſait auſſi qu'en diviſant $aa - bb$ par $a - b$, le quotient donne $a + b$. Lorſque $b = a$, ce quotient eſt $= 2a$, & alors on a $\frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = \frac{2a(0)}{1.(0)} = \frac{2a}{1} = \frac{0}{0}$, en conſidérant 0 comme une même quantité qui multiplie $2a$ & 1.

écrit $2y\,dy$, il eſt viſible que pour retrouver y^2, il ſuffit d'augmenter l'expoſant (1 ſous-tendu) de y d'une unité, & de diviſer enſuite par $2dy$ pour avoir y^2, de maniere que les régles du calcul intégral étant analogues à celles du calcul différentiel, il ne peut y avoir aucune erreur dans la méthode qu'on ſuit dans ce premier calcul, quand même il y en auroit dans le ſecond.

Calcul des differenees finies.

171. Si la quantité variable x reçoit un increment fini p, la fonction x^2 deviendra $(x+p)^2 = xx+2px+pp$; de même x^3 deviendra $x^3+3px^2+3p^2x+p^3$. Cependant la quantité $x^0 = 1$ ne changera pas de valeur, parce que $(x+p)^0$ eſt auſſi $= 1$; ce qui vient de ce que x^0 eſt une quantité conſtante $= 1$.

Suppoſons que y eſt une fonction de x, qui devient y^I (*) lorſque x devient $x+p$; & y^{II} lorſque x devient $x+2p$; &c. les valeurs de x & de y ſe répondront de la maniere qu'on voit ici,

x; $x+p$; $x+2p$; $x+3p$; $x+4p$; &c.
y; y^I; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; &c.

Comme la ſerie arithmétique x; $x+p$; $x+2p$; $x+3p$; &c. peut être continuée à l'infini, de même la ſerie y; y^I; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; &c. peut avoir une infinité de termes. Si $y=x$, ou ſi $y=ax+b$, la ſerie y; y^I; y^{II}; &c. ſera *arithmétique*. Si $y =$

(*) Dans l'expreſſion y^I, 1 ne déſigne pas l'expoſant de y, & l'on n'emploie cette expreſſion que pour diſtinguer y de y^I.

$\frac{a}{bx+c}$, l'on aura une *ſerie harmonique*. Mais la ſerie ſera *géométrique*, ſi $y = a^x$.

172. Pour déſigner les différences qui ſe trouvent entre les termes de la ſerie y; y^{I}; y^{II}; &c. je me ſervirai de la lettre D; de ſorte que $y^{I} - y$ ſera $= Dy$, $y^{II} - y^{I} = Dy^{I}$, &c. Ainſi Dy exprimera l'increment que reçoit y lorſqu'on ſubſtitue $x + p$ au lieu de x: nous appellerons auſſi cet increment *la différentielle finie* de y, ou ſimplement la différence de y. C'eſt pourquoi Dy^{II} ſera la différence de y^{II}, c'eſt-à-dire, l'excès de y^{III} ſur y^{II}. Dans la ſerie des différences Dy; Dy^{I}; Dy^{II}; Dy^{III}; Dy^{IV}; &c. on peut prendre de nouvelles différences, & les repréſenter comme on le voit ici.

$$DDy = Dy^{I} - Dy$$
$$DDy^{I} = Dy^{II} - Dy^{I}$$
$$DDy^{II} = Dy^{III} - Dy^{II}$$
&c.

Il eſt aiſé de voir que DDy ou D^2y repréſente la ſeconde différence de y; D^2y^{I} la ſeconde différence de y^{I}; &c. De même les troiſiémes différences de y; y^{I}; &c. ſeront déſignées par D^3y; D^3y^{I}; &c. & ainſi de ſuite.

Maintenant puiſque $Dy^{I} = y^{II} - y^{I}$, on aura $D^2y = y^{II} - 2y^{I} + y$, & $DDy^{II} = y^{III} - 2y^{II} + y^{I}$; & par conſéquent $D^3y = DDy^{I} - DDy = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y$. De même $D^4y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$; $D^5y = y^{V} - 5y^{IV} + 10y^{III} - 10y^{II} + 5y^{I} - y$; & ainſi de ſuite. Dans ces ſeries les coefficiens numériques ſont les mêmes que ceux du binome $(a - b)^m$ lorſque m eſt un nombre entier poſitif.

173.

173. PROBLÊME. *Trouver les différences de tous les ordres de la puiſſance* x^2. Puiſque $y = x^2$, on aura $y^1 = (x+p)^2$, & $Dy = y^1 - y = xx + 2px + pp - x^2 = 2px + pp$. Mais p eſt ici une quantité conſtante, qui ne reçoit aucun increment, & Dx eſt $= p$; donc $DDy = D(2px + pp) = 2pDx = 2pp$, & $DDDy = 0$; $D^4y = 0$; &c.

174. PROBLÊME. *Trouver les différences de tous les ordres de la puiſſance* x^3. En faiſant $y = x^3$, l'on aura $y^1 = (x+p)^3$, & $Dy = 3px^2 + 3ppx + p^3$. Mais $D.xx = 2px + pp$; donc $D.3px^2 = 6ppx + 3p^3$. Or $D.3ppx = 3p^3$, & $D.3p^3 = 0$; donc $DDy = 6p^2x + 6p^3$; & $D^3y = 6p^3$; les autres différences ſont $= 0$.

175. PROBLÊME. *Trouver la différence premiere du logarithme hyperbolique de* x. Soit $y = L.x$, l'on aura $y^1 = L.(x+p)$, & $Dy = y^1 - y = L.(x+p) - L.x = L.\left(\frac{x+p}{x}\right) = L.\left(1+\frac{p}{x}\right)$.

Puiſque $Dy = y^1 - y$, l'on aura $y^1 = y + Dy$; l'on aura de même $y^{II} = y + 2Dy + DDy$; $y^{III} = y + 3Dy + 3DDy + D^3y$; $y^{IV} = y + 5Dy + 6DDy + 4D^3y + D^4y$; &c. Les coefficiens numériques ſe trouvent évidemment par l'évolution du binome $(a+b)^m$; de ſorte qu'en général l'on aura la valeur de y de l'ordre n, que je déſignerai par $y^{(n)}$, l'on aura, dis-je, $y^{(n)} = y + \frac{n}{1}Dy + \frac{n.(n-1).D^2y}{1.2} + \frac{n.(n-1).(n-2).D^3y}{1.2.3}$ + &c. Si au lieu d'un increment $+p$, x recevoit un décrement $-p$, c'eſt-à-dire, ſi x ſe changeoit en $x-p$, alors à $(x - np)$ répondroit $y^{(n)} =$

$y - \frac{n}{1}.Dy + \frac{n.(n-1).D^2y}{1.2.} - \frac{n.(n-1).(n-2).D^3y}{1.2.3}$

&c.

176. Voyons maintenant par quel moyen étant donnée une différence, on peut par la méthode inverse revenir à la quantité qui l'a produite, & que nous appellerons *somme* (*). Si l'on suppose $z = Dy$, l'on aura $M.z = y + C$, M étant la caractéristique qui désigne la somme, & C une quantité constante arbitraire, ou qu'on peut déterminer par la nature du problême. Or cette quantité C n'ayant aucun increment, doit avoir disparu dans la différenciation. Quand on n'ajoutera pas de quantité constante à la somme, il faudra la supposer. Au reste cette quantité peut souvent être $= 0$.

Puisque $Dx = p$, l'on aura $M.p = x$, & $M.1 = \frac{x}{p}$; car la différentielle Dx étant $= p$, l'on aura $D(\frac{x}{p}) = \frac{p}{p} = 1$. Donc $M.1 = \frac{x}{p}$. Nous aurons aussi $M.(2px + pp) = x^2$; donc $M.x = \frac{xx}{2p} - M.\frac{p}{2} = \frac{x^2}{2p} - \frac{x}{2}$. L'on a de même $M.(3pxx + 3p^2x + p^3) = x^3$, ou $3p.Mx^2 + 3p^2.M.x + p^3.M.1 = x^3$; donc $M.xx = \frac{x^3}{3p} - pM.x - \frac{p^2}{3}M.1 = \frac{x^3}{3p} - \frac{x^2}{2} + \frac{px}{6}$. De même $M.x^3 = \frac{x^4}{4p} - \frac{3p}{2}M.x^2 - p^2Mx - \frac{p^3}{4}.M.1$.

(*) On pourroit l'appeller l'intégrale d'une différentielle aux différences finies.

Si l'on ſubſtitue dans cette expreſſion les valeurs trouvées ci-devant de M. x^2, M. x, & M. 1, il viendra M. $x^3 = \frac{x^4}{4p} - \frac{x^3}{2} + \frac{pxx}{4}$. On trouvera par la même méthode M. $x^4 = \frac{x^5}{5p} - \frac{1}{2}. x^4 + \frac{1}{3} p x^3 - \frac{1}{30} p^3 x$; M. $x^5 = \frac{x^6}{6p} - \frac{1}{2} x^5 + \frac{5}{12} p x^4 - \frac{1}{12} p^3. x^2$; M. $x^6 = \frac{x^7}{7p} - \frac{1}{2} x^6 + \frac{1}{2} p. x^5 - \frac{1}{6} p^3. x^3 + \frac{1}{42} p^5 x$. Il eſt facile de continuer. Si on ſuppoſe $p = 1$, ce qui eſt très-permis, on aura

M. $1 =$ M. $x^0 = x$
M. $x = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x$
M. $x\,x = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x$
M. $x^3 = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^2$
M. $x^4 = \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30}. x$
M. $x^5 = \frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{2} x^5 + \frac{5}{12} x^4 - \frac{1}{12}. x^2$
M. $x^6 = \frac{1}{7} x^7 - \frac{1}{2} x^6 + \frac{1}{2} x^5 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{42}. x$
&c. = &c.

177. Soit $y = \frac{1}{x+np}$, on aura $y^1 = \frac{1}{x+(n+1)p}$; $Dy = \frac{1}{x+(n+1)p} - \frac{1}{x+np} = \frac{-p}{(x+np).[x+(n+1)p]}$, formule digne de remarque. Donc M. $\frac{1}{(x+np)[x+(n+1)p]} = -\frac{1}{p}\left(\frac{1}{x+np}\right)$. Puiſque $Dy = \frac{1}{x+(n+1)p} -$

$\frac{1}{x+np}$, on a $y = \text{M.}\left(\frac{1}{x+(n+1)p}\right) - \text{M.}\left(\frac{1}{x+np}\right) = \frac{1}{x+np}$, & $\text{M.}\left(\frac{1}{x+np}\right) = \text{M.}\left(\frac{1}{x+(n+1)p}\right) - \left(\frac{1}{x+np}\right)$, formule que je désignerai par (A).

178. PROBLÊME. *Trouver la somme de la quantité* $\frac{3p}{x(x+3p)}$. En faisant cette quantité $= t$, on aura $t = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3p}$. Donc $\text{M.}\,t = \text{M.}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{M.}\left(\frac{1}{x+3p}\right)$. Mais par la formule A, l'on trouve $\text{M.}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{M.}\left(\frac{1}{x+p}\right) - \frac{1}{2}x$; donc $\text{M.}\,t = \text{M.}\left(\frac{1}{x+p}\right) - \text{M.}\left(\frac{1}{x+3p}\right) - \frac{1}{2}x$. De même $\text{M.}\left(\frac{1}{x+p}\right)$ est $= \text{M.}\left(\frac{1}{x+2p}\right) - \left(\frac{1}{x+p}\right)$; c'est pourquoi $\text{M.}\,t = \text{M.}\left(\frac{1}{x+2p}\right) - \text{M.}\left(\frac{1}{x+3p}\right) - \frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{x+p}\right)$. Mais l'équation ci-dessus $\text{M.}\left(\frac{1}{x+(n+1)p}\right) - \text{M.}\left(\frac{1}{x+np}\right) = \frac{1}{x+np}$, donne, en supposant $n = 2$, $-\left(\frac{1}{x+2p}\right) = \text{M.}\left(\frac{1}{x+2p}\right) - \text{M.}\left(\frac{1}{x+3p}\right)$; donc $\text{M.}\,t = -\frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{x+p}\right) - \left(\frac{1}{x+2p}\right)$.

Uſage du calcul des différences finies dans la doctrine des ſeries.

179. x Déſignant le nombre des termes, *le terme général* d'une ſuite eſt une fonction de x dans laquelle ſi on ſubſtitue ſucceſſivement à la place de x les nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. on obtiendra tous les termes de la ſerie. Ainſi la ſerie 1, 7, 13, 19, 25, 31, &c. a pour terme général $6x - 5$; de ſorte que ſi l'on ſuppoſe $x = 5$, par exemple, ce terme général que j'appellerai X devient $X = 6x - 5 = 30 - 5 = 25$, cinquiéme terme de la ſerie propoſée. Le *terme ſommatoire* d'une ſerie (on peut le déſigner par S) eſt une fonction de x dans laquelle ſi à la place de x on ſubſtitue un nombre entier poſitif, on aura la ſomme d'autant de termes que ce nombre contient d'unités. Le terme ſommatoire S de la ſerie dont nous venons de parler étant $3xx - 2x$, ſi on ſuppoſe $x = 3$, on aura $S = 27 - 6 = 21$, ſomme des trois premiers termes de la ſerie.

Suppoſons une ſerie a, b, c, e, f, g, &c. dont le terme général correſpondant au terme du rang x ſoit $= X$, le terme ſommatoire étant repréſenté par S. Puiſque S repréſente la ſomme d'autant de termes que x contient d'unités, la ſomme du nombre $x - 1$ de termes ſera $= S - X$. Si l'on retranche cette quantité de la ſuivante S, le reſte X ſera la différence de $(S - X)$. Suppoſons $p = 1$, à cauſe de $X = D(S - X)$, nous aurons $M.X = (S - X)$; donc $S = M.X + X + C$. La quantité C doit être déterminée de maniere que lorſque $x = 0$, l'on ait auſſi $S = 0$; de ſorte que ſi x étant $= 0$, l'on trouve $S = 5$, l'on aura l'équation $S = 5 + C = 0$; donc C ſera alors $= -5$. Si x

étant toujours $=0$, l'on trouvoit $S=-5+C$, l'on auroit $C-5=0$, & par conſéquent $C=0+5=5$. La raiſon en eſt que le terme ſommatoire S doit s'évanouir lorſque la valeur de la ſerie eſt nulle; or la valeur de la ſerie eſt nulle, ſi $x=0$. Mais ſi $S=0$, lorſque $x=0$, dans ce cas C ſera $=0$. Si au lieu d'exprimer ſimplement par S comme ci-deſſus, le terme ſommatoire d'une ſerie dont le terme général eſt X, nous l'exprimons par S.X, nous aurons l'équation $S.X=M.X+X+C$, & faiſant toujours $p=1$, & ſuppoſant ſucceſſivement $X=x^0, x^1, x^2, x^3, x^4$, &c. nous trouverons

$S.x^0=x$

$S.x^1=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

$S.x^2=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{6}x$

$S.x^3=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2$

$S.x^4=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x$

$S.x^5=\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{12}x^4-\frac{1}{12}x^2$

$S.x^6=\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{42}x$

$S.x^7=\frac{1}{8}x^8+\frac{1}{2}x^7+\frac{7}{12}x^6-\frac{7}{24}x^4+\frac{1}{12}x^2$

$S.x^8=\frac{1}{9}x^9+\frac{1}{2}x^8+\frac{2}{3}x^7-\frac{7}{15}x^5+\frac{2}{9}x^3$
$-\frac{1}{30}x$

$S.x^9=\frac{1}{10}x^{10}+\frac{1}{2}x^9+\frac{3}{4}x^8-\frac{7}{10}x^6+\frac{1}{2}x^4$
$-\frac{31}{20}x^2$

$S.x^{10}=\frac{1}{11}x^{11}+\frac{1}{2}x^{10}+\frac{5}{6}x^9-x^7+x^5$
$-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{66}x$

$S.x^{11}=\frac{1}{12}x^{12}+\frac{1}{2}x^{11}+\frac{11}{12}x^{10}-\frac{11}{8}x^8+\frac{11}{6}x^6$
$-\frac{11}{8}x^4+\frac{5}{12}x^2$

$S.x^{12}=\frac{1}{13}x^{13}+\frac{1}{2}x^{12}+x^{11}-\frac{11}{6}x^9+\frac{22}{7}x^7$
$-\frac{33}{10}x^5+\frac{5}{3}x^3-\frac{691}{2730}x$

&c.

En examinant ces ſuites, on s'apperçoit qu'il y a une loi par laquelle les termes de la ſuivante peuvent ſe déduire de la précédente, ſi on en excepte le dernier terme dans les ſéries qui contiennent la premiere puiſſance de x. Omettant donc ce dernier terme, ſi on a S. $x^n = ax^{n+1} + bx^n + cx^{n-1} - ex^{n-3} + fx^{n-5} - gx^{n-7} + hx^{n-9} -$ &c. la ſomme ſuivante ſera

$$\text{S. } x^{n+1} = \frac{(n+1).a}{n+2}\,x^{n+2} + \frac{(n+1)b.}{n+1}\,x^{n+1} + \frac{(n+1).c}{n}\,x^n - \frac{(n+1)e}{n-2}\cdot x^{n-2} + \frac{(n+1)f}{n-4}\,x^{n-4} - \frac{(n+1).g}{n-6}\,x^{n-6} + \frac{(n+1).h}{n-8}\,x^{n-8} - \text{ &c.}$$

Si n eſt un nombre pair, la ſerie que nous venons de trouver ſera exacte; mais ſi n eſt un nombre impair, il faudra ajouter un terme qui ſera $= \pm Px$.

Pour avoir la valeur de P, on ſuppoſera $x = 1$; donc dans ce cas on pourra ſuppoſer $x^{n+1} = 1 = x^0$, & S. x^{n+1} = S. $x^0 = x = 1$. C'eſt pourquoi on ſuppoſera la ſomme de tous les termes trouvés par la formule précédente $= 1$, & de cette ſuppoſition on déduira la valeur de P. Par exemple la valeur de S. x^5 étant S. $x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$, l'on en conclura, en faiſant $n = 5$, S. x^{n+1} = S. $x^6 = \frac{6}{7}.\frac{1}{5}.x^7 + \frac{6}{6}.\frac{1}{2}x^6 + \frac{6}{5}.\frac{5}{12}x^5 - \frac{6}{3}.\frac{1}{12}.x^3 + Px$, ou S. $x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + Px$. Qu'on faſſe maintenant $x = 1$ pour avoir $1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + P$, il viendra $P = \frac{1}{42}$, ainſi que cela doit être.

180. PROBLÊME. *Trouver le terme ſommatoire de la ſerie* 2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, &c. *dont le terme général eſt* $= \frac{3xx+x}{2}$. Le terme

général étant composé de deux membres $\frac{3}{2}xx$, $+\frac{1}{2}x$, cherchez séparément le terme sommatoire de chacun par les formules ci-dessus, pour avoir S. $\frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}xx + \frac{1}{4}x$, & S. $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}x$. Ajoutant ensemble les deux termes sommatoires, leur somme donnera le terme sommatoire cherché; & l'on aura S. $\frac{3xx+x}{2} = \frac{1}{2}x^3 + xx + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x+1)^2$. Si l'on suppose $x=5$, $\frac{1}{2}(6)^2 = 90$ sera la somme des cinq premiers termes de la serie.

181. PROBLÊME. *Trouver le terme sommatoire de la serie* 1, 27, 125, 343, 729, 1331, *&c. des cubes des nombres impairs dont le terme général est* $(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, l'on aura 8. S. $x^3 = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$; $-12.S.x^2 = -4x^3 - 6x^2 - 2x$; $+6.S.x = +3x^2 + 3x$; $-S.1 = -1.S.x^0 = -x$. Donc le terme sommatoire cherché sera $= 2x^4 - x^2 = xx(2xx-1)$. Si l'on suppose $x=6$, l'on aura $36 \times 71 = 2556$ pour la somme des six premiers termes de la serie proposée.

182. Lorsque le terme général est le produit de plusieurs facteurs simples qui forment une progression arithmétique, on peut trouver plus facilement le terme sommatoire par une méthode élégante que nous allons expliquer; mais nous avons besoin auparavant de faire quelques remarques. Si l'on proposoit de trouver la différence de la fonction $(x+p)(x+2p) = y$; parce qu'en substituant $x+p$ au lieu de x, l'on a $y^1 = (x+2p)(x+3p)$, l'on auroit $y^1 - y = Dy = 2p(x+2p) = 2.(x+2)$, en faisant $p=1$. Donc M. $(x+2p) = \frac{1}{2p}(x+p)(x+2p)$. De même puisque la différence de $(x+np)[x+(n+1)p]$

eſt $= 2p[x+(n+1)p]$, on aura $M.[x+(n+1)p] = \frac{1}{2p}(x+np)[x+(n+1)p]$, & $M.(x+np) = \frac{1}{2p}[x+(n-1)p](x+np)$. Si l'on a $y = [x+(n-1)p](x+np)[x+(n+1)p]$, on trouvera $Dy = 3p(x+np)[x+(n+1)p]$. C'eſt pourquoi $M.(x+np)[x+(n+1)p] = \frac{1}{3p}[x+(n-1)p](x+np)[x+(n+1)p]$.

De même $M.\big((x+np)[x+(n+1)p] \times [x+(n+2)p]\big) = \frac{1}{4p}[x+(n-1)p](x+np) \times [x+(n+1)p].[x+(n+2)p]$. Il eſt facile de continuer, la loi de ces ſommes étant évidente.

Si l'on ſuppoſe $p = 1$, l'on aura $M.(x+n) = \frac{1}{2}(x+n-1)(x+n)$; $M.(x+n)(x+n+1) = \frac{1}{3}.(x+n-1)(x+n)(x+n+1)$; & ainſi de ſuite.

Maintenant ſi nous ajoutons à ces ſommes le terme général, plus une conſtante qui faſſe évanouir le terme ſommatoire lorſque x eſt $= 0$, nous obtiendrons les termes ſommatoires ſuivans. $S.(x+n) = \frac{1}{2}(x+n)(x+n-1) + (x+n) - \frac{1}{2}n(n+1)$ (*); ou $S.(x+n) = \frac{1}{2}(x+n) \times (x+n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$; $S.(x+n)(x+n+1) = \frac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$; $S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \frac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3) - \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$; & ainſi de ſuite. Si l'on ſuppoſe $n = 0$, ou $n = -1$, la conſtante s'évanouira.

Ainſi le terme ſommatoire de la ſerie 1, 2, 3, 4, 5, &c. dont le terme général eſt x, ſera $= \frac{1}{2}x(x+1)$; & la ſerie ſommatoire, de la ſerie 1, 2, 3, &c.

(*) $[x+n]$ eſt le terme général, & $-\frac{1}{2}n(n+1)$ la conſtante ajoutée qui rend le terme ſommatoire $= 0$, lorſque $x = 0$.

c'eſt-à-dire, la ſerie dont le terme général eſt $\frac{1}{2}x(x+1)$, ſera 1, 3, 6, 10, 15, &c. dont le terme ſommatoire $= \frac{x.(x+1)(x+2)}{1.2.3}$, qui eſt le terme général de la ſerie 1, 4, 10, 20, 35, &c. dont le terme ſommatoire eſt $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3.4}$, terme général de la ſerie 1, 5, 15, 35, 70, &c. dont le terme ſommatoire eſt $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.2.3.4.5}$.

183. Nous avons trouvé ci-deſſus (177) la formule $M.\left(\frac{1}{(x+np)[x+(n+1)p]}\right) = -\frac{1}{p}.\left(\frac{1}{x+np}\right)$, cette formule, en ſuppoſant $p = 1$, donne $M.\left(\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right) = -1.\left(\frac{1}{x+n}\right)$; donc en ajoutant le terme général & une conſtante convenable, l'on aura le terme ſommatoire $S.\left(\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right) = -1.\left(\frac{1}{x+n+1}\right) + \frac{1}{n+1}$. L'on aura de même $S.\left(\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$. L'on aura auſſi $S.\left[\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}\right] = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}\right] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$; il eſt facile de

continuer, la loi de ces formules étant manifeſte. De plus il eſt bon d'obſerver qu'au lieu d'ajouter le terme général aux ſommes trouvées ci-deſſus, on peut ſe contenter d'écrire dans ces expreſſions $x+1$ au lieu de x.

Puiſque S. $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$, & que $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}$, on aura S. $\frac{1}{x+n}$ — S. $\frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - (\frac{1}{x+n+1})$. De-là je tire le lemme ſuivant.

LEMME. S. $\frac{1}{x+n}$ — S. $\frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - (\frac{1}{x+n+1})$.

184. PROBLÊME. *Trouver le terme ſommatoire de la ſerie* $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}$, *&c. dont le terme général eſt* $= \frac{2}{xx+x}$. Parce que $\frac{2}{xx+x} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$, l'on aura le terme ſommatoire S. $\frac{2}{xx+x} = 2$ S. $\frac{1}{x}$ — 2. S. $\frac{1}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$ (par le lemme précédent) $= \frac{2x}{x+1}$.

185. PROBLÊME. *Trouver le terme ſommatoire de la ſerie* $\frac{1}{5}, \frac{1}{21}, \frac{1}{45}, \frac{1}{77}, \frac{1}{117}$, *&c. dont le terme général eſt* $= \frac{1}{4xx+4x-3}$. Ce terme eſt $= \frac{1}{(2x-1)(2x+3)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{2x-1}) - \frac{1}{4}(\frac{1}{2x+3})$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right)$. Mais S. $\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)$ $= S.\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right) + 2 - \left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$, & S. $\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$ $= S.\left(\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right) + \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$. Donc S. $\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)$ $- S.\left(\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right) = 2 + \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right)$. Diviſant donc cette valeur par 8, on aura le terme ſommatoire cherché $= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{8x+4}\right)$ $- \left(\frac{1}{8x+12}\right) = \frac{x}{4x+2} + \frac{x}{3(4x+6)}$ $= \frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}$.

186. De ce qu'on a dit ci-deſſus (183), il ſuit qu'étant donnés les termes généraux qu'on voit ci-deſſous dans la colonne A, les termes ſommatoires correſpondans ſeront les mêmes qu'on voit dans la colonne B.

TERMES GÉNÉRAUX.		TERMES SOMMATOIRES.
A		B
$\frac{1.2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{x+1}$
$\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1.3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1.2.3.4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1.2.4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1.2.3.4.5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1.2.3.5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
&c.		&c.

Il eſt facile de continuer, la loi de ces expreſſions étant évidente (*). Cependant on ne peut pas trouver par ce moyen le terme ſommatoire de la ſerie dont le terme général eſt $\frac{1}{x}$.

Si dans les termes ſommatoires de la colonne B on ſuppoſe $x = \infty$, leurs derniers termes s'éva-

(*) Si l'on avoit la puiſſance $-m$ du binome $a+b$, les coefficients ſeroient, à compter du ſecond terme, ſeroient, dis-je $-m$, $\frac{-m(-m-1)}{2}$, $\frac{-m(-m-1)(-m-2)}{2.3}$, $\frac{-m.(-m-1)(-m-2)(-m-3)}{2.3.4}$, &c. En changeant tous les ſignes, l'on auroit m, $\frac{m.(m+1)}{2}$, $\frac{m.(m+1)(m+2)}{2.3}$, $\frac{m.(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3.4}$, &c., & en ſubſtituant x au lieu de m, il viendroit x, $\frac{x(x+1)}{2}$, $\frac{x.(x+1)(x+2)}{2.3}$, $\frac{x[x+1][x+2][x+3]}{2.3.4}$, &c. qui ſont les termes généraux des ſuites des nombres figurés, en n'y comprenant pas la ſerie des nombres conſtans 1, 1, 1, &c. dont le terme général eſt $1 = x^0$. Mais $\frac{1.2}{x[x+1]}$ eſt le quotient de 1 diviſé par $\frac{x[x+1]}{2}$; $\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}$ eſt le quotient de 1 diviſé par $\frac{x[x+1][x+2]}{2.3}$; &c. Ainſi les termes généraux de la colonne A ne ſont autre choſe que les quotiens de l'unité diviſée ſucceſſivement par les nombres figurés, en n'y comprenant ni les nombres conſtans, ni les nombres naturels.

nouiront. C'eſt pourquoi les ſeries ſuivantes continuées à l'infini ont des ſommes finies.

$\frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \&c. = \frac{2}{1}$

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \&c. = \frac{3}{2}$

$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \&c. = \frac{4}{3}$

$1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \&c. = \frac{5}{4}$

$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84} + \frac{1}{210} + \&c. = \frac{6}{5}$

&c.

FIN.

Fig. 3

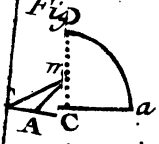


Fig. 4

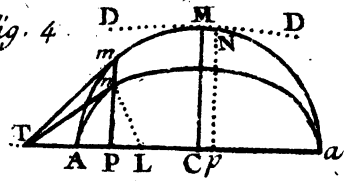


Fig. 5

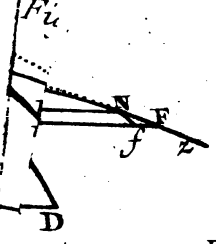


Fig. 7.

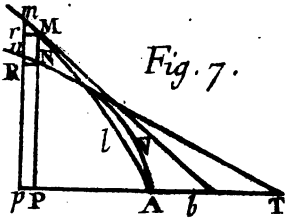


Fig. 12.

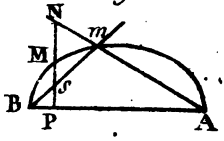
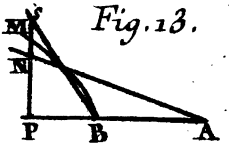


Fig. 13.



T

Fig. 14.

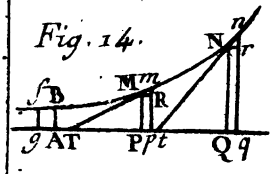


Fig. 15.

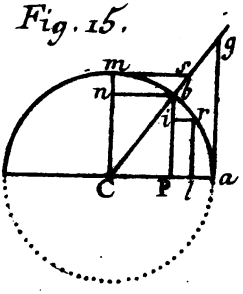


Fig. 19.

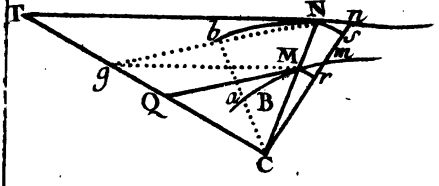
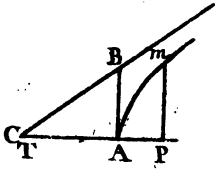
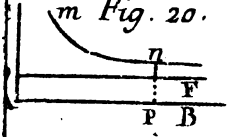
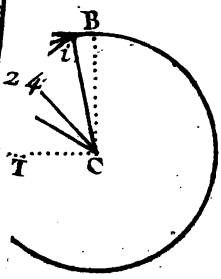


Fig. 21.



m Fig. 20.





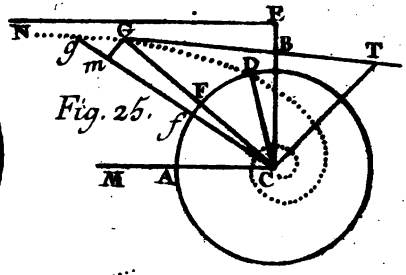
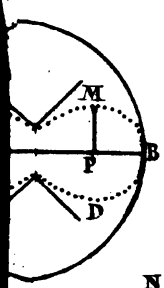


Fig. 25.



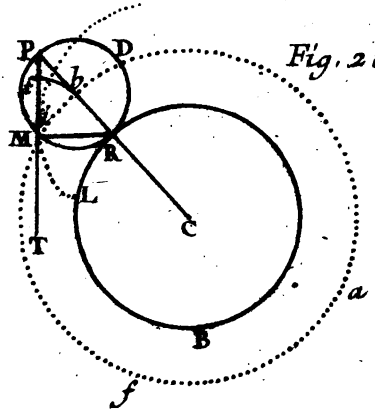


Fig. 28.

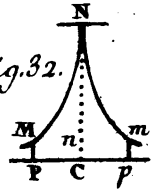


Fig. 32.

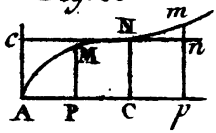


Fig. 33.

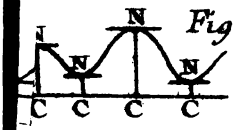


Fig. 36.

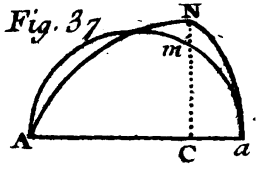


Fig. 37.

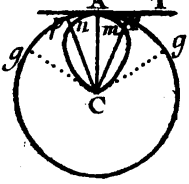


Fig. 41.

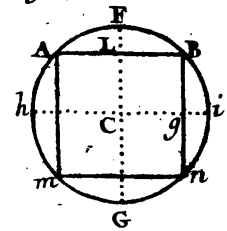


Fig. 43.

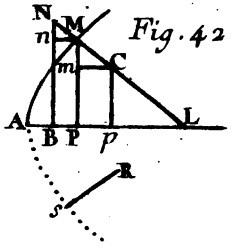


Fig. 42.

Fig. 49.

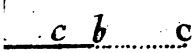


Fig. 50.

Fig. 51.

Fig. 52.

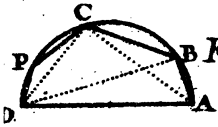


Fig. 56.

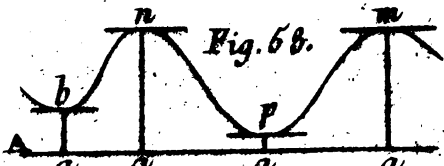


Fig. 68.

ig. 69.

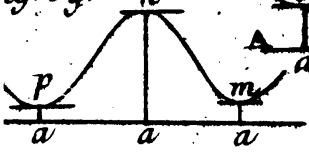


Fig. 67.

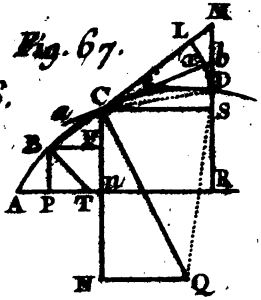


Fig. 65.

Fig. 66.

Fig. 70

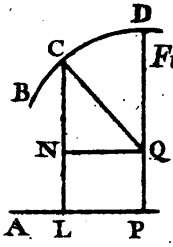


Fig. 71.

Fig. 72.

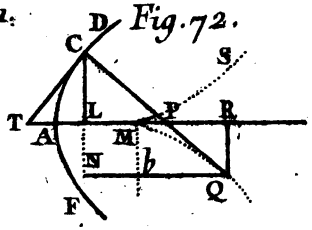
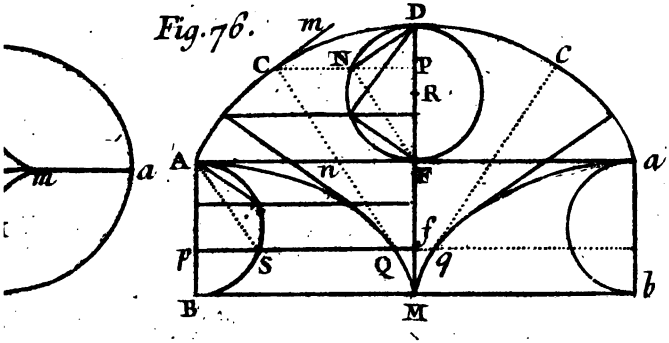


Fig. 76.



UNIV. OF

Fig. 79.

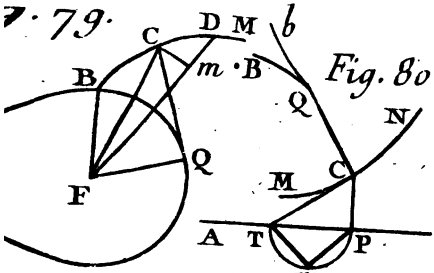


Fig. 80.

Fig. 81.

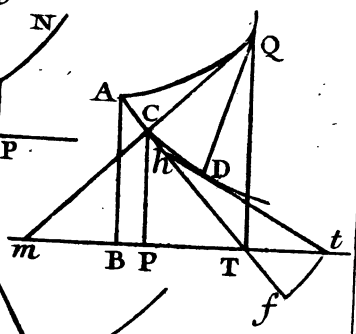
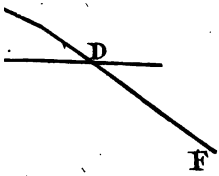


Fig. 81. A.



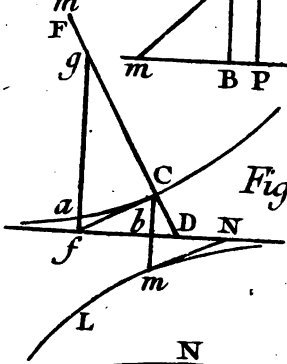
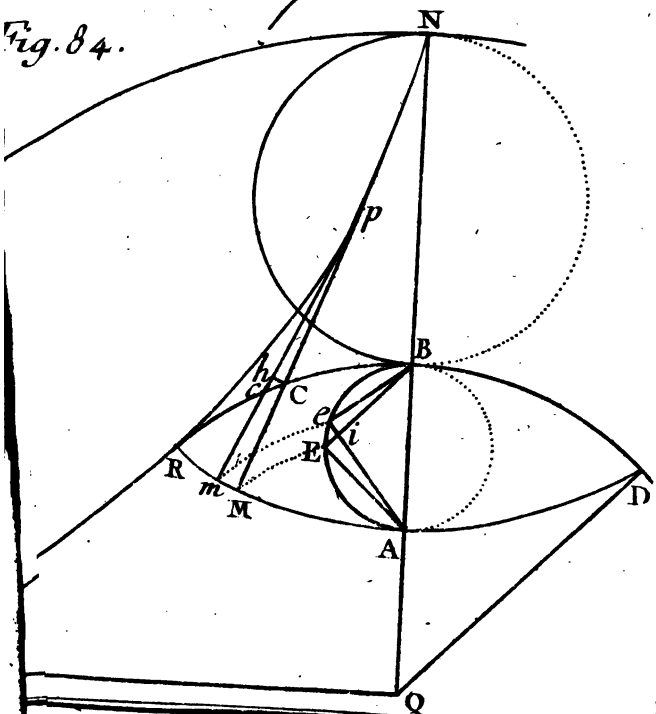


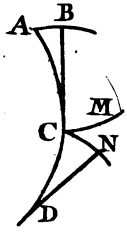
Fig. 81. B.

Fig. 84.



UNIV. OF MICH.

Fig 87



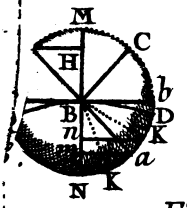


Fig 89.

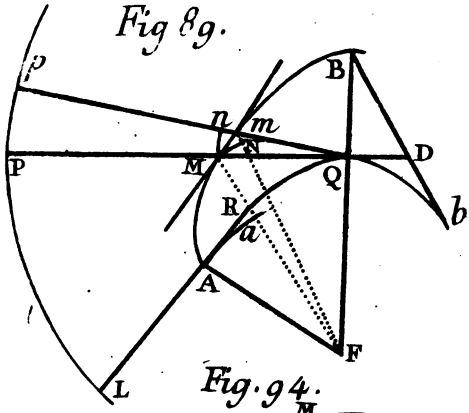


Fig. 94.

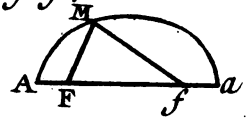
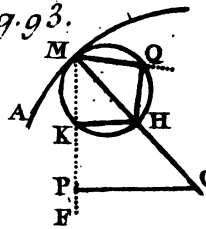


Fig. 93.



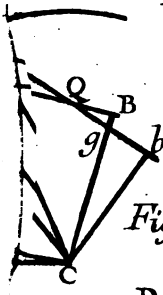


Fig. 92.

Fig. 95.

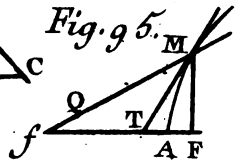


Fig. 97.

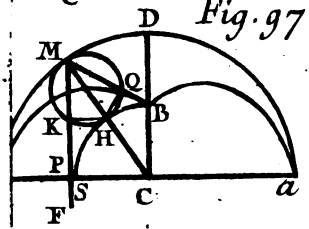


Fig. 98.

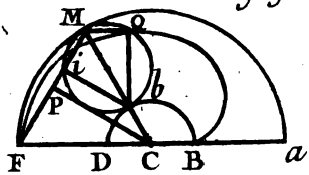


Fig. 103.

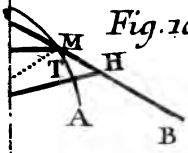
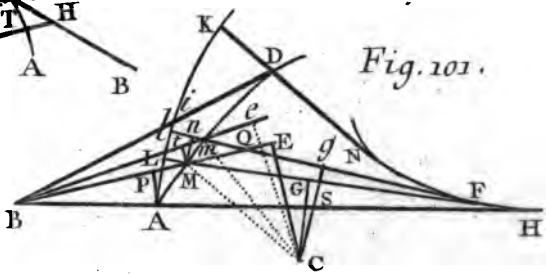


Fig. 101.



UNIV. OF MICH.

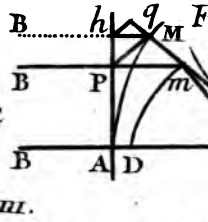


Fig. 106.

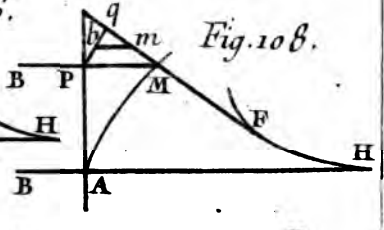


Fig. 108.

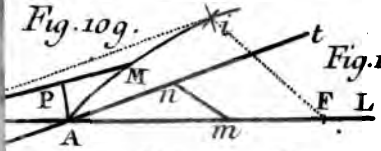


Fig. 109.

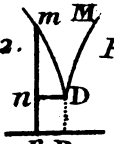


Fig. 112.

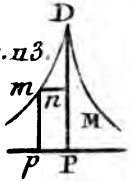


Fig. 113.

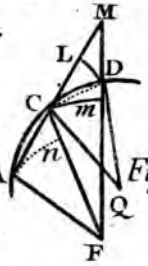


Fig. 118.

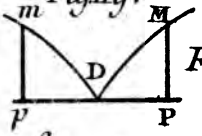


Fig. 119.

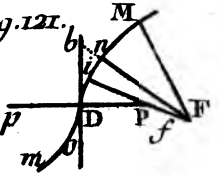


Fig. 121.

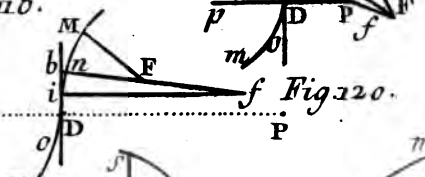


Fig. 120.

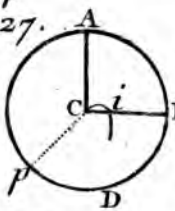


Fig. 127.

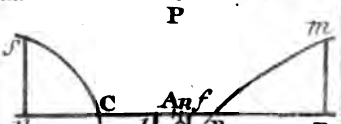
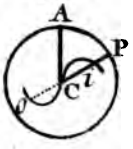


Fig. 128 B

Fig. 128.



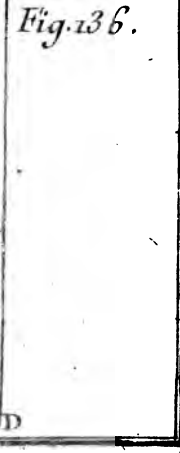


Fig. 136.

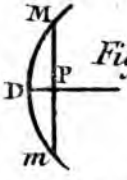


Fig. 134.

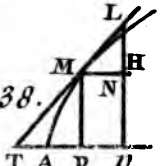


Fig. 138.

TABLE
DES MATIERES
Contenues en ce Volume.

Calcul infinitésimal pag. 1
Calcul différentiel, 2
Des différences des ordres supérieurs & de leur intégration, 11
Application du calcul différentiel aux tangentes, sous-normales & normales, à la méthode de déterminer l'angle de la courbe avec une ligne parallèle aux abscisses ou aux ordonnées, & aux asymptotes des courbes, 49
Des asymptotes des courbes dont les ordonnées partent d'un point qu'on appelle foyer, 70
De la fraction $\frac{0}{0}$ *& des tangentes qui en dépendent*, 72
De la méthode des maximis *&* minimis, 88
Des développées & des rayons osculateurs, 165
Des caustiques par réflexion & par réfraction, 204
Des points d'inflexion & de rebroussement, 228
Des usages du calcul différentiel dans l'Algèbre, 262
Usage du calcul différentiel dans la recherche des racines des équations, 265
De quelques usages du calcul différentiel dans les series, 284
Recherches métaphysiques sur la nature du calcul différentiel, 294

Calcul des différences finies, 303
Usage du calcul des différences finies dans la doctrine des series, 309

Fin de la Table des Matieres.